УДК 514.852

Н.В. Амишева
(Кемеровский государственный университет)

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ И ИХ СВОЙСТВАХ НА ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА

Метод исследования изоэнергетической поверхности интегрируемых дифференциальных уравнений описан в книге [1]. В данной работе рассматриваются неинтегрируемые дифференциальные уравнения Кирхгофа, описывающие движение тела в жидкости. На изоэнергетической поверхности, определенной указанными уравнениями, найдены инвариантные направления и указаны их некоторые свойства.

1. Динамические уравнения Кирхгофа и их интегралы.
Динамические уравнения Эйлера

$$K' = [K,\omega] + [e,u],\ e' = [e,\omega] \tag{1}$$

всегда имеют три интеграла:

$$f_1 = \sum p_i^2 = p^2, \quad f_2 = \sum K_i p_i = s \ (\text{ i, j = 1, 2, 3 }), \tag{2}$$

$f_3 = H$ – интеграл энергии, который при различных движениях имеет разный вид. Если интеграл H имеет вид

$$2E = 2H = \sum a_{ij} K_i K_j + 2\sum b_{ij} K_i p_j + \sum c_{ij} p_i p_j, \tag{3}$$

причем $\omega^i = \dfrac{\partial H}{\partial K_i}$, $u^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$ есть угловая и поступательная скорости, то этот интеграл называют интегралом Кирхгофа. Система дифференциальных уравнений (1) в этом случае описывает движение конечного твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости. Интегралы f_1 и f_2, зависящие от шести переменных K_i, p_i, определяют четырехмерное симплектическое многообразие M^4, на котором интеграл энергии задает трехмерную изоэнергетическую поверхность Q_3.

В работе [2] вводятся координаты $\theta, \psi, \xi_1, \xi_2$ многообразия M^4 по формулам:

$$\left.\begin{aligned} p_1 = p\cos\theta\cos\psi,\ \ p_2 = p\cos\theta\sin\psi,\ \ p_3 = p\sin\theta, \\ q_1 = K_1 - s\frac{p_1}{p},\ q_2 = K_2 - s\frac{p_2}{p},\ q_3 = K_3 - s\frac{p_3}{p}, \\ q_1 = \xi_2 tg\theta\cos\psi - \xi_1\sin\psi,\ \ q_2 = \xi_2 tg\theta\sin\psi + \xi_1\cos\psi,\ \ q_3 = -\xi_2. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Из формул (4) находим

$$\left.\begin{aligned} K_1 = q_1 + sp_1 = \xi_2 tg\theta\cos\psi - \xi_1\sin\psi + s\cos\theta\cos\psi, \\ K_2 = q_2 + sp_2 = \xi_2 tg\theta\sin\psi + \xi_1\cos\psi + s\cos\theta\sin\psi, \\ K_3 = q_3 + sp_3 = -\xi_2 + s\sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Четырехмерное симплектическое многообразие M^4 можно задать вектор-функцией:

$$\vec{R}(\theta, \psi, \xi_1, \xi_2) =$$
$$= (p\cos\theta\cos\psi,\ p\cos\theta\sin\psi,\ p\sin\theta,\ \xi_2 tg\theta\cos\psi - \xi_1\sin\psi + s\cos\theta\cos\psi,$$
$$\xi_2 tg\theta\sin\psi + \xi_1\cos\psi + s\cos\theta\sin\psi,\ -\xi_2 + s\sin\theta).$$

Евклидова метрика пространства R^6 порождает риманову метрику $\tilde{g}_{IJ}$ (I, J = 1, 2, 3, 4) многообразия M^4:

$$\tilde{g}_{11} = (R_\theta, R_\theta),\ \tilde{g}_{22} = (\vec{R}_\psi, \vec{R}_\psi),\ \tilde{g}_{13} = (\vec{R}_\theta, \vec{R}_{\xi_1}),\ \tilde{g}_{23} = (\vec{R}_\psi, \vec{R}_{\xi_1}),$$
$$\tilde{g}_{12} = (\vec{R}_\theta, \vec{R}_\psi),\ \tilde{g}_{24} = (\vec{R}_\psi, \vec{R}_{\xi_2}),\ \tilde{g}_{14} = (\vec{R}_\theta, \vec{R}_{\xi_2}),\ \tilde{g}_{34} = (\vec{R}_{\xi_1}, \vec{R}_{\xi_2}).$$

Изоэнергетическая поверхность Q_3 на M^4 определяется уравнением $H(\theta, \psi, \xi_1, \xi_2) = const$. Если в качестве локальных координат поверхности Q_3 выбрать координаты θ, ψ, ξ_1, то ее уравнение примет вид: $\xi_2 = f(\theta, \psi, \xi_1)$. На шестимерном евклидовом пространстве R^6 поверхность постоянной энергии Q_3 можно задать вектор-функцией:

$$\vec{r} = \vec{R}(\theta, \psi, \xi_1, f(\theta, \psi, \xi_1)) = (p\cos\theta\cos\psi,\ \ p\cos\theta\sin\psi,$$
$$p\sin\theta,\ \ f(\theta, \psi, \xi_1) tg\theta\cos\psi - \xi_1\sin\psi + s\cos\theta\cos\psi,$$
$$f(\theta, \psi, \xi_1) tg\theta\sin\psi + \xi_1\cos\psi + s\cos\theta\sin\psi,\ \ -f(\theta, \psi, \xi_1) + s\sin\theta).$$

2. Квадратичные формы поверхности Q_3.

Риманова метрика многообразия M^4 (или евклидова метрика пространства R^6) порождает на поверхности Q_3 риманову метрику:

$$g_{11}=(\vec{r}_\theta,\vec{r}_\theta)=p^2+s^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{f^2}{\cos^4\theta}+$$
$$+2f\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}-2s\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{1}{\cos\theta}-2sf\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta},$$
$$g_{12}=(\vec{r}_\theta,\vec{r}_\psi)=\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial f}{\partial\psi}\frac{1}{\cos^2\theta}+f\frac{\partial f}{\partial\psi}\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}-$$
$$-s\frac{\partial f}{\partial\psi}\frac{1}{\cos\theta}-\xi_1\frac{\partial f}{\partial\theta}tg\theta-\xi_1 f\frac{1}{\cos^2\theta}+s\xi_1\sin\theta,$$
$$g_{13}=(\vec{r}_\theta,\vec{r}_{\xi_1})=\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\frac{1}{\cos^2\theta}+f\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}-s\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\frac{1}{\cos\theta},$$
$$g_{23}=(\vec{r}_\theta,\vec{r}_{\xi_1})=\frac{\partial f}{\partial\psi}\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\frac{1}{\cos^2\theta}-\xi_1\frac{\partial f}{\partial\xi_1}tg\theta+ftg\theta+s\cos\theta,$$
$$g_{22}=(\vec{r}_\psi,\vec{r}_\psi)=p^2\cos^2\theta+f^2tg^2\theta+\xi_1^2+s^2\cos^2\theta+$$
$$+2sf\sin\theta-2\xi_1\frac{\partial f}{\partial\psi}tg\theta+\left(\frac{\partial f}{\partial\psi}\right)^2\frac{1}{\cos^2\theta},$$
$$g_{33}=(\vec{r}_{\xi_1},\vec{r}_{\xi_1})=1+\left(\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\right)^2\frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Коэффициенты второй квадратичной формы определяются формулами: $\beta_{ij}=(\vec{r}_{ij},\vec{n})$, где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали поверхности Q_3, а $(\vec{r}_{ij},\vec{n})$ – скалярное произведение, определяемое римановой метрикой $(\tilde{g}_{IJ})$ многообразия M^4. Вектор $\vec{n}(n^1,n^2,n^3,n^4)$ можно определить равенствами

$$\left(\vec{n},\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right)=\left(n,\frac{\partial\vec{r}}{\partial\psi}\right)=\left(\vec{n},\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi_1}\right)=0,\ \left|\vec{n}\right|=1.$$

Если ввести обозначение $k=\tilde{g}_{14}n^1+\tilde{g}_{24}n^2+\tilde{g}_{34}n^3+\tilde{g}_{44}n^4$, то коэффициенты β_{ij} принимают вид:

$$\beta_{11}=k\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2},\ \ \beta_{12}=k\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\psi},\ \ \beta_{13}=k\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\xi_1},$$

$$\beta_{23} = k\frac{\partial^2 f}{\partial\psi\partial\xi_1},\ \ \beta_{22} = k\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^2},\ \ \beta_{33} = k\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_1^2}.$$

Итак, коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности Q_3 определены.

3. Главные направления поверхности Q_3 и индикатриса нормальных кривизн.

Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы $G^{-1}B$, где $G = (g_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$, являются главными кривизнами поверхности постоянной энергии Q_3. На поверхности Q_3 введем локальную систему координат $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – главные направления поверхности Q_3, а вектор $\vec{e}_4 = \vec{n}$. В выбранной локальной системе координат индикатриса нормальных кривизн определяется уравнениями:

$$\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + \lambda_3(x^3)^2 = const,\ \ x^4 = 0, \tag{6}$$

где $x^1 = \cos\varphi_1$, $x^2 = \cos\varphi_2$, $x^3 = \cos\varphi_3$, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – углы между касательным к поверхности вектором $\vec{V}$ и главными направлениями этой поверхности. Так как главные направления поверхности находятся из системы уравнений $(\beta_{ij} - \lambda g_{ij})m^j = 0$, где λ – одна из главных кривизн поверхности, то формулы перехода от исходной системы координат $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \vec{E}_4)$ к локальной системе координат $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, присоединенной к точке P_0 поверхности Q_3, можно записать в следующем виде:

$$\theta = m_1^1 x^1 + m_2^1 x^2 + m_3^1 x^3 + n^1 x^4,\ \ \psi = m_1^2 x^1 + m_2^2 x^2 + m_3^2 x^3 + n^2 x^4,$$

$$\xi_1 = m_1^3 x^1 + m_2^3 x^2 + m_3^3 x^3 + n^3 x^4,\ \ \xi_2 = c_1^4 x^1 + c_2^4 x^2 + c_3^4 x^3 + n^4 x^4,$$

где

$$c_i^4 = m_i^1\frac{\partial f}{\partial\theta}(P_0) + m_i^2\frac{\partial f}{\partial\psi}(P_0) + m_i^3\frac{\partial f}{\partial\xi_1}(P_0).$$

Симплектическая структура Ω многообразия M^4 в системе координат $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \vec{E}_4)$ имеет вид [3]:

$$\Omega = d\xi_1 \wedge d\theta + d\xi_2 \wedge d\psi + s\cos\theta d\theta \wedge d\psi,$$

матрица коэффициентов которой в системе координат $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ запишется так: $\Omega = (\omega_{IJ})$, где $\omega_{IJ} = -\omega_{JI}$.

4. Инвариантные направления поверхности Q_3.

Теорема. *В касательной плоскости изоэнергетической поверхности, определяемой интегралом энергии системы дифференциальных уравнений Кирхгофа, существует в общем случае три инвариантных направления.*

Доказательство. Для каждой точки $P \in Q_3$ и для каждого вектора $\vec{v}(v_1, v_2, v_3, v_4)$, принадлежащего $T_P Q_3$, изотропная плоскость симплектического пространства M^4 в системе координат $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, определяется уравнениями $\omega_{IJ} v^J x^I = 0$. Изотропная плоскость пересекается с плоскостью $T_p Q_3$ по двумерной плоскости L_2, определенной системой уравнений:

$$x^4 = 0, \;\; \omega_{ij} v^j x^i = 0. \qquad (7)$$

Будем искать такой вектор $\vec{v}$, принадлежащий касательной плоскости $T_P Q_3$, для которого плоскость L_2 будет сопряжена вектору $\vec{v}$ относительно индикатрисы нормальных кривизн (6). Так как плоскость, сопряженная вектору $\vec{v} \in Q_3$ относительно индикатрисы нормальных кривизн (6), определяется уравнениями $x^4 = 0$, $\lambda_1 v^1 x^1 + \lambda_2 v^2 x^2 + \lambda_3 v^3 x^3 = 0$, то указанное свойство вектора $\vec{v}$ приводит к равенствам :

$$(\omega_{ij} - t\delta_{ij}\lambda_i) v^j = 0. \qquad (8)$$

Система уравнений (8) имеет ненулевые решения, когда определитель этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 - t\lambda_1 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 - t\lambda_2 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 - t\lambda_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9)$$

Каждому решению последнего уравнения соответствует направление, определяемое системой уравнений (8). Теорема доказана.

Замечание. Аналогичные направления для многообразий квадратичных элементов в работе [3] названы основными.

5. Свойства основных направлений.

Предложение 1. Всегда одним из корней характеристического уравнения (9) является корень t = 0. Этот корень либо простой, либо трехкратный. Если t = 0 простой, то два других могут быть или действительные, или комплексно сопряженные.

Доказательство. Характеристическое уравнение (9) можно записать в виде:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 t^3 + \left((\omega_{23})^2\lambda_1 + (\omega_{13})^2\lambda_2 + (\omega_{12})^2\lambda_3\right)\mathrm{t} = 0. \quad (10)$$

Отсюда непосредственно вытекает, что одним из корней характеристического уравнения всегда является t = 0; этот корень, как видно из уравнения (10), либо простой, либо трехкратный. Если корень t = 0 простой, то два других корня находятся из уравнения:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 t^2 + \left((\omega_{23})^2\lambda_1 + (\omega_{13})^2\lambda_2 + (\omega_{12})\lambda_3\right) = 0,$$

которые могут быть действительными или комплексно сопряженными.

Предложение 2. Изотропная плоскость основного направления, соответствующего корню t = 0, не определена.

Доказательство. Так как система уравнений, определяющая основные направления при t = 0, имеет вид

$$\omega_{12}v^2 + \omega_{13}v^3 = 0,\ \ \omega_{12}v^1 - \omega_{23}v^3 = 0,\ \ \omega_{12}v^1 + \omega_{23}v^2 = 0, \quad (11)$$

то основное направление, соответствующее корню t = 0, можно задать вектором $\vec{v}(\omega_{23}, -\omega_{13}, \omega_{12})$. Изотропная плоскость, определенная вектором $\vec{v}(v^1, v^2, v^3)$, имеет уравнение $\omega_{ij}v^i x^j = 0$. Подставляя в это уравнение координаты вектора $\vec{v}(\omega_{23}, -\omega_{13}, \omega_{12})$, убеждаемся, что все коэффициенты в указанном уравнении равны нулю.

Определение. Основное направление, соответствующее корню t = 0, назовем особым.

Предложение 3. Корень t = 0 является трехкратным тогда и только тогда, когда основное направление, соответствующее этому корню, является асимптотическим направлением индикатрисы нормальных кривизн.

Доказательство. Необходимость. Корень t = 0 уравнения (10) является трехкратным, если выполнено равенство:

$$\lambda_1(\omega_{23})^2 + \lambda_2(\omega_{13})^2 + \lambda_3(\omega_{12})^2 = 0. \quad (12)$$

Уравнения конуса асимптотических направлений индикатрисы нормальных кривизн (6) имеет следующий вид:

$$x^4 = 0,\ \ \lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + \lambda_3(x^3)^2 = 0. \quad (13)$$

При условии (12) этому уравнению удовлетворяют координаты основного направления $\vec{v}(\omega_{23}, -\omega_{13}, \omega_{12})$, соответствующего корню t = 0, т.е. это основное направление является асимптотическим направлением индикатрисы нормальных кривизн.

Достаточность. Основное направление $\vec{v}(\omega_{23}, -\omega_{13}, \omega_{12})$, соответствующее корню t = 0, является и асимптотическим направлением индикатрисы нормальных кривизн, если выполнено равенство (12). Но при выполнении этого равенства корень t = 0 уравнения (10) является трехкратным. Предложение доказано.

Трехкратному корню t = 0 может соответствовать или единственное направление (ранг системы (11) равен двум), или двумерная плоскость (ранг системы (11) равен единице). В силу невырожденности структуры Ω трехкратному корню t = 0 не может соответствовать трехмерная плоскость, т.е. ранг системы (11) не может быть равен нулю. В следующей теореме сформулированы условия, при которых трехкратному корню t = 0 соответствует двумерная плоскость.

Предложение 4. Если трехкратному корню t = 0 соответствует двумерная плоскость основных прямых, то проекция индикатрисы нормальных кривизн на эту плоскость есть гипербола, коэффициенты уравнения которой равны коэффициентам ненулевых элементов симплектической структуры.

Доказательство. Умножив второе уравнение системы (11) на ω_{13}, а третье – на ω_{12} и вычитая одно из другого, получим систему для определения основных направлений, эквивалентную системе (11):

$$\omega_{12}v^2 + \omega_{13}v^3 = 0, \;\; \omega_{23}(\omega_{12}v^2 +_{13} v^3) = 0, \;\; \omega_{12}v^1 + \omega_{23}v^3 = 0. \quad (14)$$

Ранг последней системы равен единице, если $\omega_{12} = 0$. Следовательно, при $\omega_{12} = 0$ трехкратному корню t = 0 соответствует двумерная плоскость, которой, как следует из системы (14), является плоскость (x^1, x^2). Условие (12) является условием трехкратности корня t = 0, которое при $\omega_{12} = 0$ примет следующий вид: $\lambda_1(\omega_{23})^2 + \lambda_2(\omega_{13})^2 = 0$. С учетом последнего равенства уравнение индикатрисы нормальных кривизн запишется так: $(\omega_{13})^2(x^1)^2 - (\omega_{23})^2(x^2)^2 + \lambda_3(x^3)^2 = const$. Предложение доказано.

Следствие. Если корню t = 0 соответствует двумерная плоскость, то она является плоскостью симметрии индикатрисы нормальных кривизн.

Доказательство непосредственно вытекает из уравнений (14).

Список литературы

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. М., 1999. Т. 1, 2.

2. *Новиков С.П., Шмельцер И.* Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника-Шнирельмана-Морса (ЛШМ-1) // Функциональный анализ и его приложения. 1981. Т. 15. Вып. 3. С. 54 – 66.

3. *Амишева Н.В.* О семействах алгебраических элементов второго порядка в эквиаффинном пространстве // Геом. сб. Томск, Изд-во Томского ун-та, 1972. Т. 212. Вып. 9. С. 198 – 209.

N. Amisheva

ON INVARIANT DIRECTIONS AND THEIR PROPERTIES ON AN ISOENERGETIC SURFACE OF NON-INTEGRABLE DIFFERENTIAL KIRCHHOFF'S EQUATIONS

Non-integrable differential Kirchhoff's equations describing motion of a body in liquid are considered in this work. Invariant directions are found on the isoenergetic surface and some their properties are pointed.

УДК 513.82

М.Б. Банару

(Смоленский гуманитарный университет)

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ КЕНМОЦУ 6-МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

Доказано, что гиперповерхность Кенмоцу 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры октав минимальна в том и только том случае, если ее типовое число равно четырем. Также доказано, что минимальная гиперповерхность Кенмоцу 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры октав не может быть вполне омбилической.

1. Теория почти контактных метрических структур занимает одно из ведущих мест в современных дифференциально-геометричес-