УДК 514.75 (08)

Ю. И. Попов

О ПОЛЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ Δ-ОСНАЩЕННОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Определен специальный класс (Δ-оснащенных) гиперповерхностей проективного пространства и доказана его теорема существования. Построены внутренним инвариантным образом в дифференциальной окрестности 3-го порядка: а) нормализация Нордена — Тимофеева гиперповерхности; б) две нормализации Нордена касательного Λ-подрасслоения; в) в каждой L-плоскости три однопараметрических пучка ее нормалей Нордена 2-го рода.

The special class of (Δ-framed) hypersurfaces of the projective space P_n — is defined, and its existence theorem is proved. In the differential 3rd order neighbourhood: (a) *Norden–Timofeyev's normalization of the hypersurface;* (b) *two Norden's normalizations of the tangent Λ-subbundle;* (c) *in each L-plane three one-parameter sheaves of its Norden's 2nd kind normals–are constructed internally invariantly.*

Ключевые слова: нормализация, квазитензор, подрасслоение, биекция Бомпьяни — Пантази, охват геометрического объекта, гиперповерхность.

Key words: normalization, quasitensor, subbundle, Bompiani–Pantazi bijection, geometrical object coverage, hypersurface.

В работе использована следующая схема индексов:

$$i, j, k, l = \overline{1, n-1}; \; p, q, s, t = \overline{1, m}; \; a, b, c = \overline{m+1, n-1}.$$

1. Задание гиперповерхности $\Omega_{n-1}(\Delta) \subset P_n$. Теорема существования

Рассмотрим в проективном пространстве P_n гиперповерхность Ω_{n-1}, оснащенную полем Δ-плоскостей размерности $m+1$ (плоскостей $\Delta_{m+1} \overset{\text{def}}{=} \Delta$) таких, что в каждой точке $A \in \Omega_{n-1}$ выполняется условие

$$\Delta(A) \cap T_{n-1}(A) = \Lambda_m(A),$$

где $T_{n-1}(A)$ — касательная плоскость гиперповерхности Ω_{n-1} в точке A. Такие гиперповерхности в дальнейшем будем обозначать $\Omega_{n-1}(\Delta)$.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. № 4. С. 16 – 23.

В каждой точке $A \in \Omega_{n-1}(\Delta)$ плоскости $\Lambda(A)$ ($\Lambda \overset{\text{def}}{=} \Lambda_m(A)$) соответствует сопряженная ей плоскость $L(A) \overset{\text{def}}{=} L_{n-m-1}(A)$ относительно конуса асимптотических направлений

$$\Lambda_{ij}^n x^i x^j = 0,\, x^n = 0,$$

лежащего в касательной гиперплоскости $T_{n-1}(A) \subset \Omega_{n-1}(\Delta)$.

Известно [1], что дифференциальные уравнения гиперповерхности $\Omega_{n-1} \subset P_n$ в репере R_1 имеют вид

$$\omega_0^n = 0, \tag{1}$$

а трехкратное продолжение уравнения (1) приводит к уравнениям

$$\omega_i^n = \lambda_{ik}^n \omega_0^k,\, \nabla\lambda_{ij}^n + \lambda_{ij}^n \omega_0^0 = \lambda_{ijk}^n \omega^k,$$

$$\begin{gathered} \nabla\lambda_{ijk}^n \omega^k + 2\lambda_{ijk}^n \omega_0^0 + \lambda_{ij}^n \omega_k^0 + \lambda_{ik}^n \omega_j^0 + \lambda_{jk}^n \omega_i^0 - \\ -(\lambda_{lk}^n \lambda_{ij}^n + \lambda_{il}^n \lambda_{jk}^n + \lambda_{lj}^n \lambda_{ik}^n) = \lambda_{ijkl}^n \omega_0^l, \end{gathered} \tag{2}$$

где функции $\lambda_{ik}^n, \lambda_{ijk}^n, \lambda_{ijkl}^n$ симметричны относительно нижних индексов.

Основной фундаментальный тензор $\{\lambda_{ij}^n\}$ второго порядка гиперповерхности $\Omega_{n-1}(\Delta)$ симметрический и имеет следующее строение:

$$\left\| \lambda_{ij}^n \right\| = \begin{Vmatrix} \lambda_{pq}^n & 0 \\ 0 & \lambda_{ab}^n \end{Vmatrix},\, \nabla\lambda_{ij}^n + \lambda_{ij}^n \omega_0^0 = \lambda_{ijk}^n \omega_0^k.$$

Так как гиперповерхность оснащена полями сопряженных плоскостей $\Lambda(A)$, $L(A)$, то в этом случае $\lambda_{pa}^n = 0$ и $\lambda_{ap}^n = 0$.

Тензор $\{\lambda_{ij}^n\}$ невырожден, т. е.

$$\begin{gathered} \Lambda_0 = \det\left\| \lambda_{ij}^n \right\| \neq 0,\, d\ln\Lambda_0 + (n+1)(\omega_0^0 + \omega_n^n) = \lambda_n^{ji} \lambda_{ijk}^n \omega_0^k \overset{\text{def}}{=} \tilde{\Lambda}_k \omega^k, \\ \nabla\tilde{\Lambda}_k + \tilde{\Lambda}_k \omega_0^0 + (n+1)(\omega_k^0 - \Lambda_{kj}^n \omega_n^j) = \tilde{\Lambda}_{ki} \omega^i,\, \tilde{\Lambda}_{ki} = \tilde{\Lambda}_{ik}. \end{gathered}$$

Функции $\{\lambda_{pq}^n\}$ и $\{\lambda_{pq}^n\}$ также образуют невырожденные симметрические тензоры 2-го порядка:

$$\begin{gathered} \lambda_0 \overset{\text{def}}{=} \det\left\| \lambda_{pq}^n \right\|,\, l_0 \overset{\text{def}}{=} \det\left\| \lambda_{ab}^n \right\| \neq 0, \\ \nabla\lambda_{pq}^n + \lambda_{pq}^n \omega_0^0 = \lambda_{pqi}^n \omega_0^i,\, \nabla\lambda_{ab}^n + \lambda_{ab}^n \omega_0^0 = \lambda_{abi}^n \omega_0^i. \end{gathered}$$

Для тензоров $\{\lambda_{pq}^n\}$, $\{\lambda_{ab}^n\}$, $\{\lambda_{ij}^n\}$ введем обратные им тензоры:

$$\begin{gathered} \lambda_n^{pq} \lambda_{qt}^n = \delta_t^p,\, \nabla\lambda_n^{pq} - \lambda_n^{pq} \omega_0^0 \equiv 0,\, \lambda_n^{ij} \lambda_{jk}^n = \delta_k^i, \\ \lambda_n^{ab} \lambda_{bc}^n = \delta_c^a,\, \nabla\lambda_n^{ab} - \lambda_n^{ab} \omega_0^0 \equiv 0,\, \nabla\lambda_n^{ij} - \lambda_n^{ij} \omega_0^0 \equiv 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Выберем репер $R_1 = \{A_{\bar{J}}\}$, ассоциированный с гиперповерхностью $\Omega_{n-1}(\Delta)$, следующим образом:

$$A \equiv A_0,\, \{A_p\} \subset \Lambda_m(A_0),\, \{A_a\} \subset L_{n-m-1}(A_0),\, \{A_n\} \in \Delta(A_0).$$

В репере R_1 (первого порядка) гиперповерхность $\Omega(\Delta)$ задается системой уравнений

$$\omega_0^n = 0,\ \omega_p^n = \lambda_{pq}^n \omega_0^q,\ \omega_a^n = \lambda_{ab}^n \omega_0^b,\ \omega_p^a = \lambda_{pi}^a \omega_0^i,\ \omega_a^p = \lambda_{ai}^p \omega_0^i,\ \omega_n^a = \lambda_{ni}^a \omega_0^i \tag{4}$$

и их замыканием

$$\nabla\lambda_{pq}^n + \lambda_{pq}^n \omega_0^0 = \lambda_{pqi}^n \omega^i, \tag{5}$$

$$\nabla\lambda_{ab}^n + \lambda_{ab}^n \omega_0^0 = \lambda_{abi}^n \omega^i, \tag{6}$$

$$\nabla\lambda_{pi}^a + \lambda_{pi}^a \omega_0^0 - \delta_i^a \omega_p^0 = \lambda_{pij}^a \omega^j, \tag{7}$$

$$\nabla\lambda_{ai}^p + \lambda_{ai}^p \omega_0^0 + \lambda_{ab}^n \delta_i^b \omega_n^p - \delta_i^p \omega_a^0 = \lambda_{aij}^p \omega^j, \tag{8}$$

$$\nabla\lambda_{ni}^a + \lambda_{ni}^a \omega_0^0 - \lambda_{pi}^a \omega_n^p - \delta_i^a \omega_n^0 = \lambda_{nij}^a \omega^j. \tag{9}$$

Имеет место теорема существования гиперповерхности $\Omega(\Delta)$.

Теорема 1. *Гиперповерхность* $\Omega_{n-1}(\Delta)$ *проективного пространства* P_n, *заданная системой уравнений* (4)—(9), *существует с произволом* $(2m+1)(n-m-1)$ *функций* $n-1$ *аргумента.*

Доказательство. Чистое замыкание системы (4) представим в виде

$$\Delta\lambda_{pq}^n \wedge \omega^q = 0,\ \Delta\lambda_{ab}^n \wedge \omega^b = 0,\ \Delta\lambda_{pi}^a \wedge \omega^i = 0,\ \Delta\lambda_{ai}^p \wedge \omega^i = 0,\ \Delta\lambda_{ni}^a \wedge \omega^i = 0. \tag{10}$$

Найдем характеры системы (10), следуя работе [2].

Пусть $A = (2m+1)(n-m-1)$, тогда

$$S_1 = m + (n-m-1) + A,\ S_2 = (m-1) + (n-m-2) + A,$$
$$S_3 = (m-2) + (n-m-3) + A,\ \ldots,\ S_{m-1} = (m-(m-2)) + (n-2m+1) + A,$$
$$S_m = (m-(m-1)) + (n-2m) + A,\ S_{m+1} = (n-2m-1) + A,\ \ldots,$$
$$S_{n-m-1} = ((n-m-1)-(n-m-2)) + A,\ S_{n-m} = A,\ \ldots,\ S_{n-1} = A.$$

Подсчитаем число Картана Q [2] для системы (10):

$$Q = S_1 + 2S_2 + 3S_3 + \ldots + (n-1)S_{n-1} =$$
$$= \frac{m(m+1)(m+2)}{6} + \frac{(n-m-1)(n-m)(n-m+1)}{6} + (2m+1)(n-m-1)\frac{n(n-1)}{2}.$$

Разложим уравнения (10) по лемме Картана [1; 2] и затем найдем число N вновь полученных функций в этих разложениях: $N = Q$. Следовательно, система уравнений (10) в инволюции [2] и гиперповерхность $\Omega(\Delta) \subset P_n$ с произволом $(2m+1)(n-m-1)$ функций $n-1$ аргумента. □

2. Поле плоскостей Нордена — Тимофеева гиперповерхности $\Omega(\Delta)$

1. Из условия инвариантности $\delta M_p = \theta_p^q M_q$ плоскости $N_{m-1}(A_0) = [M_p] = [A_p + \nu_p^0 A_0]$ находим, что $\nabla_\delta \nu_p^0 + \pi_p^0 = 0$.

Отсюда следует, что поле квазитензора $\{\nu_p^0\}$ [1]

$$\nabla \nu_p^0 + \omega_p^0 = \nu_{pi}^0 \omega^i \tag{11}$$

задает поле нормалей 2-го рода в смысле Нордена [3] касательного Λ-подрасслоения (в дальнейшем просто Λ-подрасслоения) на гиперповерхности $\Omega(\Delta)$.

Охват квазитензора $\{\nu_p^0\}$ (11) представим в виде

$$\nu_p^0 = \lambda_p^0 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1}\lambda_{pa}^a, \; \nabla\lambda_p^0 + \omega_p^0 = \lambda_{pi}^0 \omega^i. \tag{12}$$

Таким образом, нормаль 2-го рода $N_{m-1}(A_0) = [A_p + \nu_p^0 A_0]$ плоскости $\Lambda(A_0)$ (элемента Λ-подрасслоения) определена внутренним образом в дифференциальной окрестности 2-го порядка.

Аналогично, из условия инвариантности $\delta M_a = \theta_a^b M_b$ плоскости $N_{n-m-2}(A_0) = [A_a + \nu_a^0 A_0]$ находим, что $\nabla_\delta \nu_a^0 + \pi_a^0 = 0$.

Значит, поле нормалей 2-го рода касательного L-подрасслоения на гиперповерхности $\Omega(\Delta)$ определено уравнениями

$$\nabla \nu_a^0 + \omega_a^0 = \nu_{ai}^0 \omega_0^i. \tag{13}$$

Построив охват квазитензора $\{\nu_a^0\}$ (13) в виде

$$\nu_a^0 = \lambda_a^0 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{m}\lambda_{ap}^p, \; \nabla\lambda_a^0 + \omega_a^0 = \lambda_a^0 \omega^i, \tag{14}$$

убеждаемся, что в каждой точке $A_0 \in \Omega(\Delta)$ нормаль 2-го рода в смысле Нордена [3] $N_{n-m-2}(A_0) = [M_a] = [A_a + \lambda_a^0 A_0]$ плоскости $L(A_0)$ (элемента L-подрасслоения) задается внутренним образом в дифференциальной окрестности 2-го порядка.

Из уравнений (11), (13) следует, что поле нормалей Нордена 2-го рода $N_{n-2}(A_0)$ [3] гиперповерхности $\Omega(\Delta)$ определяется уравнениями

$$\nabla \nu_i^0 + \omega_i^0 = \nu_{ij}^0 \omega^j,$$

а из уравнений (12), (14) — что поле квазитензора $\{\lambda_i^0\} \overset{\text{def}}{=} \{\lambda_p^0, \lambda_a^0\}$, уравнения которого имеют вид

$$\nabla \lambda_i^0 + \omega_i^0 = \lambda_{ij}^0 \omega^j, \tag{15}$$

задает внутренним образом поле нормалей Нордена 2-го порядка $N_{n-2}(A_0) = [A_i + \lambda_i^0 A_0]$ гиперповерхности $\Omega(\Delta)$.

2. Найдем фокальное многообразие [4; 5] Δ-плоскости при смещении точки A_0 вдоль кривых

$$(\ell):\begin{cases}\omega_0^n = 0,\; \omega_0^p = 0,\; \omega_0^a = \rho^a\theta, \\ d\theta = \theta\wedge\theta_0^0,\; \nabla\rho^a - \rho^a(\theta_0^0 + \omega_0^0) = \rho_1^a\theta,\end{cases}$$

принадлежащих касательному L-подрасслоению

$$\Phi(\Delta, L):\begin{cases} x^a = 0, \\ \det\left\|\delta_b^a x^0 + \lambda_{pb}^a x^p + \lambda_{nb}^a x^n\right\| = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Фокальное многообразие $\Phi(\Delta, L)$ (16) представляет собой алгебраическое многообразие размерности m, порядок которого $n-m-1$. Плоскость $\Lambda(A_0)$ сечет многообразие $\Phi(\Delta, L)$ по алгебраическому многообразию

$$\Phi(\Lambda, L):\begin{cases} x^a = 0,\, x^n = 0, \\ \det\left\|\delta_b^a x^0 + \lambda_{pb}^a x^p\right\| = 0 \end{cases} \tag{17}$$

порядка $n-m-1$ размерности $m-1$.

Линейная поляра точки A_0 относительно многообразия $\Phi(\Delta, L)$ (16) есть m-плоскость Кёнигса $K_m(A_0) \subset \Delta(A_0)$ [4]

$$(K_m):\begin{cases} x^a = 0, \\ x^0 - \lambda_p^0 x^p - \lambda_n^0 x^n = 0, \end{cases} \tag{18}$$

а относительно многообразия $\Phi(\Lambda, L)$ (17) — плоскость

$$N_{m-1}(A_0):\begin{cases} x^a = 0,\, x^n, \\ x^0 - \lambda_p^0 x^p = 0, \end{cases} \tag{19}$$

где

$$\lambda_n^0 = -\frac{1}{n-m-1}\lambda_{na}^a,\; \nabla\lambda_n^0 - \lambda_p^0\omega_n^p + \omega_n^0 = \lambda_{ni}\omega^i. \tag{20}$$

Вывод. *Нормаль 2-го рода* $N_{m-1}(A_0)$ (19) *плоскости* $\Lambda(A_0)$ *есть линейная поляра точки* A_0 *относительно многообразия* $\Phi(\Lambda, L)$ (17), *а плоскость Кёнигса* $K_m(A_0)$ [4] – *линейная поляра относительно многообразия* $\Phi(\Delta, L)$ (16).

3. Рассмотрим фокальное многообразие [5] $\Phi(N, L)$ нормали $N_{n-m}(A_0)$ 1-го рода плоскости $\Lambda(A_0)$ при смещении точки A_0 вдоль кривых

$$(\lambda):\begin{cases} \omega^p = \mu^p\theta,\, d\theta = \theta\wedge\theta_0^0, \\ \nabla\mu^p - \mu^p(\theta_0^0 + \omega_0^0) = \mu_1^p\theta, \end{cases}$$

принадлежащих касательному Λ-подрасслоению гиперповерхности $\Omega(\Delta)$:

$$\Phi(N, \Lambda):\begin{cases} x^p = \lambda_n^p x^n, \\ \det\left\|\delta_q^p x^0 + \lambda_{aq}^p x^a + (\lambda_{nq}^p - \lambda_{tq}^n\lambda_n^t\lambda_n^p)x^n\right\| = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Многообразие $\Phi(N, \Lambda)$ (21) есть алгебраическое многообразие размерности $n-m-1$ порядка m. Плоскость $L(A_0)$ пересекает многообразие (21) по алгебраическому многообразию $\Phi(L, \Lambda)$ порядка m размерности $n-m-2$:

$$\Phi(L, \Lambda): \begin{cases} x^p = 0,\, x^n = 0, \\ \det\left\|\delta_q^p x^0 + \lambda_{aq}^p x^a\right\| = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Линейная поляра точки A_0 относительно многообразия $\Phi(L, \Lambda)$ (22) есть нормаль 2-го рода $N_{n-m-2}(A_0)$ плоскости $L(A_0)$

$$N_{n-m-2}(A_0): \begin{cases} x^p = 0,\, x^n = 0, \\ x^0 - \lambda_a^0 x^a = 0. \end{cases}$$

Резюмируя результаты раздела 2, приходим к выводу.

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка поле квазитензора* $\{\lambda_i^0\}$ (15) *задает поле нормалей 2-го рода Нордена* [3] *гиперповерхности* $\Omega(\Delta)$ *— поле плоскостей Нордена — Тимофеева* [6], *а поле квазитензора* $\{\lambda_p^0, \lambda_n^0\}$ *— поле плоскостей Кёнигса* K_m (18).

3. Соответствие Бомпьяни — Пантази

1. Согласно (2), (5) функции $t_i = \dfrac{1}{n+1}\lambda_{ijk}^n \lambda_n^{jk}$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla t_i + \omega_0^0 + \omega_i^0 = \lambda_{ij}^n \omega_n^j + t_{ij}\omega^j. \tag{23}$$

Введем, учитывая (23) и следуя работам [3; 4], соответствие Бомпьяни — Пантази [7] между нормалями 1-го и 2-го рода Нордена гиперповерхности $\Omega(\Delta)$:

$$\nu_i^0 = \lambda_{ij}^n \nu_n^j + t_i,\; \nu_n^i = \lambda_n^{ij}\nu_j^0 + t_n^i, \tag{24}$$

где

$$t_n^i = -t_k \lambda_n^{ik},\; \nabla t_n^i + \omega_n^i = \lambda_n^{ij}\omega_j^0 + t_{nk}^i \omega^k,\; \nabla \nu_i^0 + \omega_i^0 = \nu_{ij}^0 \omega^j,\; \nabla \nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nj}^i \omega^j.$$

Аналогично, функции

$$t_p = \frac{1}{m+2}\lambda_{pqt}^n \lambda_n^{qt},\; \nabla t_p + \omega_p^0 = \lambda_{pq}^n \omega_n^q + t_{pi}\omega^i,$$

где

$$\nabla \lambda_{pqt}^n + 2\lambda_{pqt}^n \omega_0^0 + \lambda_{tq}^n \omega_p^0 + \lambda_{pt}^n \omega_q^0 + \lambda_{pq}^n \omega_t^0 - (\lambda_{sq}^n \lambda_{pt}^n + \lambda_{ps}^n \lambda_{qt}^n + \lambda_{pq}^n \lambda_{st}^n)\omega_n^s \equiv 0,$$

позволяют установить соответствие Бомпьяни — Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода в смысле Нордена Λ-подрасслоения на гиперповерхности $\Omega(\Delta)$:

$$\nu_p^0 = \lambda_{pq}^n \nu_n^q + t_p,\ \nu_n^p = \lambda_n^{pq}\nu_q^0 + t_n^p, \tag{25}$$

где

$$t_n^p = -t_q\lambda_n^{pq},\ \nabla t_n^p + \omega_n^p = \lambda_n^{pq}\omega_q^0 + t_{ni}^p\omega^i.$$

2. Квазитензору $\{\lambda_i^0\}$ (15) в биекции (24) соответствует квазитензор $\{\lambda_n^i\}$:

$$\lambda_n^i \overset{\text{def}}{=} \lambda_n^{ij}\lambda_j^0 + t_n^i,\ \nabla\lambda_n^i + \omega_n^i = \lambda_{nj}^i\omega^j. \tag{26}$$

Согласно тому, что поле квазитензора $\{\lambda_i^0\}$ (15) определяет поле $(n-2)$-плоскостей Нордена — Тимофеева гиперповерхности Ω_{n-1}, то будем говорить, что поле квазитензора $\{\lambda_n^i\}$ (26) задает поле нормалей 1-го рода Нордена — Тимофеева гиперповерхности Ω_{n-1}. В результате справедлива

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности 3-го порядка гиперповерхность $\Omega(\Delta)$ порождает внутреннюю нормализацию Нордена гиперповерхности Ω_{n-1} – нормализацию Нордена – Тимофеева* $(\lambda_n^i, \lambda_i^0)$ [6].

3. Из уравнений (8) при $i = b$ получим:

$$\nabla\lambda_{ab}^p + \lambda_{ab}^p\omega_0^0 + \lambda_{ab}^n\omega_n^p \equiv 0. \tag{27}$$

В силу уравнений (27), (3) убеждаемся, что функции

$$l_n^p \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m}\lambda_{ab}^p\lambda_n^{ab},\ \nabla l_n^p + \omega_n^p = l_{ni}^p\omega^i \tag{28}$$

образуют квазитензор. Поле этого квазитензора (28) задает поле нормалей 1-го рода Нордена Λ-подрасслоения на гиперповерхности $\Omega(\Delta)$. В биекции (25) квазитензору $\{l_n^q\}$ поставим в соответствие квазитензор $\{l_p^0\}$:

$$l_p^0 \overset{\text{def}}{=} \lambda_{pq}^n\lambda_n^q + \mathrm{t}_p,\ \nabla l_p^0 + \omega_p^0 = l_{pi}^0\omega^i.$$

Тем самым определена внутренняя нормализация (l_n^p, l_p^0) Нордена Λ-подрасслоения в дифференциальной окрестности 3-го порядка. Кроме того, квазитензору $\{\lambda_p^0\}$ (12) в биекции Бомпьяни — Пантази (25) соответствует квазитензор $\{\lambda_n^p\}$

$$\lambda_n^p = \lambda_n^{pq}t_q^0 + t_n^p,\ \nabla\lambda_n^p + \omega_n^p = \lambda_{ni}^p\omega^i.$$

Следовательно, имеем еще одну внутреннюю нормализацию $\{\lambda_n^p, \lambda_p^0\}$ Λ-подрасслоения на гиперповерхности $\Omega(\Delta)$ в окрестности 3-го порядка.

4. Продолжив уравнение (5) и полагая $i = a$, получим, в частности,

$$\nabla\lambda_{pqa}^n + 2\lambda_{pqa}^n\omega_0^0 + \lambda_{pq}^n\omega_a^0 \equiv 0. \tag{29}$$

С помощью функций (29) построим поле квазитензора

$$l_a^0 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m}\lambda_{pqa}^n \lambda_n^{pq}, \ \nabla l_a^0 + \omega_a^0 = l_{ai}^0 \omega^i, \qquad (30)$$

которое определяет поле нормалей 2-го рода L-подрасслоения на гиперповерхности $\Omega(\Delta)$.

Аналогично, замыкая уравнения (6), в частности при $i = c$, получим:

$$\nabla\lambda_{abc}^n + 2\lambda_{abc}^n \omega_0^0 + \lambda_{cb}^n \omega_a^0 + \lambda_{ac}^n \omega_b^0 + \lambda_{ab}^n \omega_c^0 \equiv 0. \qquad (31)$$

Далее, используя функции (31), имеем

$$\varphi_a^0 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n-m+1}\lambda_{abc}^n \lambda_n^{bc}, \ \nabla\varphi_a^0 + \omega_a^0 \equiv 0. \qquad (32)$$

Квазитензоры $\{\lambda_a^0\}$ (14), $\{l_a^0\}$ (30), $\{\varphi_a^0\}$ (32) функционально независимы. Следовательно, каждая L-плоскость несет три однопараметрических пучка ее нормалей 2-го рода в смысле Нордена:

$$\chi_a^0(\varepsilon) = \lambda_a^0 + \varepsilon(\varphi_a^0 - \lambda_a^0), \ \vartheta_a^0(\eta) = \lambda_a^0 + \eta(l_a^0 - \lambda_a^0), \ \psi_a^0(\xi) = \varphi_a^0 + \xi(l_a^0 - \varphi_a^0). \qquad (33)$$

Из результатов пп. 3 и 4 следует

Теорема 4. Гиперповерхность $\Omega(\Delta)$ порождает в дифференциальной окрестности 3-го порядка внутренним инвариантным образом:

а) две нормализации $(\lambda_n^p, \lambda_p^0)$, (l_n^p, l_p^0) в смысле Нордена касательного Λ-подрасслоения;

б) в каждой L-плоскости три однопараметрических пучка (33) ее нормалей 2-го рода в смысле Нордена.

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Московского математического общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.
2. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М. ; Л., 1948.
3. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.
4. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. Геом. семинара. ВИНИТИ АН СССР. М., 1971. Т. 3. С. 49—94.
5. *Остиану Н. М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. Геом. семин. ВИНИТИ. М., 1973. Т. 4. С. 71—120.
6. *Попов Ю. И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. СПб., 1992.
7. *Mihailescu T.* Geometrie differentiala projectiva. Bucaresti Acad. RPR, 1958.

Об авторе

Юрий Иванович Попов — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

The author

Dr Juriy Popov, prof., I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru