ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3
1973

КАМЕНСКИЙ Н.П., РУСКОЛ Д.Е.

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗАДАНИЕМ МЕТРИКИ И ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА.

В трехмерном евклидовом пространстве рассмотрим двумерное многообразие, образующим элементом которого является прямая с фиксированной точкой-"фокусом".

Потребуем, чтобы множество фокусов образовало минимальную поверхность, а соответствующие прямые, "прямолинейные образующие" многообразия, являлись линиями пересечения касательной и аффинно-метрической нормальной (т.е. проходящей через аффинную и метрическую нормали) плоскостей "фокальной" поверхности. В этом случае многообразие назовем "минимальным аффинно-метрическим".

Пусть (x^1, x^2) -локальные координаты рассматриваемого многообразия,

$$g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2) \tag{1}$$

-метрический тензор фокальной поверхности,

$$\bar{e}^i = e^i(x^1, x^2) \tag{2}$$

-тензор, определяющий единичный вектор $\bar{e}$ прямолинейной образующей:

$$\bar{e} = e^i \partial_i \bar{r}$$

($\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2)$ -уравнение фокальной поверхности).

В работе найдены условия, которым должны удовлетворять тензоры (I) и (2), чтобы ими однозначно (с точностью до положения в пространстве) определялось минимальное аффинно-метрическое многообразие.

I. Известно, что метрическая и аффинная нормали к поверхности в каждой её точке совпадают тогда и только тогда, когда поверхность является поверхностью постоянной Гауссовой кривизны (см.[I]). Если же Гауссова кривизна K поверхности не является таковой, то можно рассматривать линию пересечения аффинно-метрической нормальной и касательной плоскостей. Направление этой прямой (с точностью до знака) в свое время было нами названо "направлением поверхности, ассоциированным с метрической и аффинной нормалями" (см.[2]).

Это направление определяется тензором

$$P^i = \tilde{\pi}^{ij} \partial_j \ln|K|, \tag{3}$$

где $\tilde{\pi}^{ij}$ -тензор, взаимный со вторым тензором поверхности. Если φ -угол между метрической и аффинной нормалями минимальной поверхности,

$$t_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln|K| \tag{4}$$

- чебышевский вектор её асимптотической сети, то имеет место

$$tg^2\varphi = -\frac{1}{K}\, g^{ij} t_i t_j \qquad (5)$$

(см. там же).

Теперь сформулированная ранее задача аналитически сводится к следующей:

Пусть задана положительно определенная квадратичная дифференциальная форма

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j \qquad (6)$$

и поле "направлений", определяемое контравариантным тензором

$$e^i = e^i\,(x^1, x^2)\,, \qquad (7)$$

удовлетворяющему соотношению

$$g_{ij}\, e^i e^j = 1\,. \qquad (8)$$

Требуется найти условия, которым должны удовлетворять тензоры g_{ij} и e^i, чтобы существовала минимальная поверхность, для которой форма (6) определяет её метрику, а поле направлений e^i связано с её первым и вторым тензорами зависимостью

$$e^i = \mu\, \tilde{\pi}^{ij} t_j\,. \qquad (9)$$

Решение поставленной задачи сводится к нахождению второго тензора π_{ij}, поверхности из системы уравнений

$$g^{ij}\pi_{ij} = 0\,, \quad \pi_{ij} e^j = \mu t_i\,, \qquad (10)$$

где μ пока произвольный скаляр. Нужно найти контравариантный, чтобы тензор π_{ij} удовлетворял условиям Гаусса

$$\varepsilon^{i\alpha}\varepsilon^{j\beta}\pi_{ij}\pi_{\alpha\beta} = \pi^{ij}\pi_{ij} = 2K \qquad (11)$$

и Петерсона-Кодацци

$$\varepsilon^{j\alpha}\pi_{ij/\alpha} = 0\,, \qquad (12)$$

где

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}\,, \quad \varepsilon_{12} = \sqrt{g}\,,$$

$$\varepsilon^{i\alpha}\varepsilon_{j\alpha} = \delta^i_j\,,$$

вертикальная черточка обозначает ковариантное дифференцирование.

Отсюда и получим интересующие нас условия.

Приступим к реализации намеченного плана.

2. В первую очередь отметим, что не любой положительно определенный тензор g_{ij} может служить метрическим тензором минимальной поверхности. Для этого необходимо должно удовлетворяться следующее условие:

$$g^{ij} t_{i|j} = -K \qquad (13)$$

(Это следует из того, что для минимальной поверхности тензор $a_{ij} = \sqrt{-K}\, g_{ij}$ имеет нулевую гауссову кривизну (см. [4])).

В дальнейшем будем предполагать, что тензор g_{ij} этому условию удовлетворяет.

3. Пусть $\tilde{e}_i$ определяет векторное поле, дополнительное к данному полю e^i, то-есть

$$\tilde{e}_i = \varepsilon_{\alpha i}\, e^\alpha\,. \qquad (14)$$

Тогда тензоры $e_i e_j$, $\tilde{e}_i \tilde{e}_j$, $(e_i \tilde{e}_j + \tilde{e}_i \tilde{e}_j)$ образуют базис в пространстве симметрических тензоров второй валентности (см., например, [5]).

Поэтому искомый тензор π_{ij} представим в виде:

$$\pi_{ij} = \rho \bar{e}_i e_j + \sigma \tilde{e}_i \tilde{e}_j + \varkappa (e_i \tilde{e}_j + \tilde{e}_i e_j), \tag{15}$$

где $\rho, \sigma, \varkappa$ —некоторые скаляры ("координаты" π_{ij} в указанном базисе), подлежащие определению.

Используя (10_1), получаем

$$\rho + \sigma = 0. \tag{16}$$

Следовательно,

$$\pi_{ij} = (\rho e_i + \varkappa \tilde{e}_i) - (\rho \tilde{e}_i - \varkappa e_i) \tilde{e}_j. \tag{17}$$

Используя (10_2), получаем

$$\mu t_i = \rho e_i + \varkappa \tilde{e}_i. \tag{18}$$

Отсюда следует, что

$$\mu \tilde{t}_i = \mu \varepsilon^{\alpha}_{\cdot i} t_\alpha = \rho \tilde{e}_i - \varkappa e_i. \tag{19}$$

Тогда из (17), (18), (19) получаем

$$\pi_{ij} = \mu (t_i e_j - \tilde{t}_i \tilde{e}_j). \tag{20}$$

Отсюда и условия (11) (уравнения Гаусса) после некоторых преобразований найдем

$$\mu^2 = -K (g^{ij} t_i t_j)^{-1}. \tag{21}$$

Обратно, если μ удовлетворяет условию (21), то тензор (20) (в качестве 2-го основного тензора поверхности) удовлетворяет уравнению Гаусса.

Таким образом, из условия минимальности искомой поверхности и условия Гаусса второй тензор вполне определяется:

$$\pi_{ij} = \sqrt{-K}\, (g^{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta)^{-\frac{1}{2}} (t_i e_j - \tilde{t}_i \tilde{e}_j). \tag{22}$$

4. Посмотрим теперь, каким условиям должны удовлетворять тензоры g_{ij} и e^i, чтобы выполнялось также уравнение Петерсона-Кодацци.

Так как тензор π_{ij} выражается формулой (20), то уравнение (12) принимает вид:

$$\varepsilon^{jk} \pi_{ij|k} = \mu_k (e_i \tilde{t}^k + \tilde{e}_i t^k) + \mu (e_{i|k} \tilde{t}^k + \tilde{e}_{i|k} t^k - \varepsilon^{jk} \tilde{t}_{j|k} \tilde{e}_i) = 0. \tag{23}$$

Здесь мы учли то, что t_i – потенциальное векторное поле (следовательно, его ротация равна нулю).

С другой стороны,

$$\varepsilon^{ij} \tilde{t}_{i|j} = - g^{ij} t_{i|j}.$$

Учитывая соотношение (13), получаем

$$\varepsilon^{ij} \tilde{t}_{i/j} = K. \tag{24}$$

И уравнение (23) приводится к виду:

$$\mu_k \tilde{t}^k e_i + \mu_k t^k \tilde{e}_i + \mu (e_{i|k} \tilde{t}^k + \tilde{e}_{i|k} t^k - K \tilde{e}_i) = 0.$$

Так как векторные поля e_i, $\tilde{e}_i$ —единичные, то их ковариантные производные имеют вид (см. [3], стр. 135-137):

$$e_{i/k} = \alpha_k \widetilde{e}_i \ , \quad \widetilde{e}_{i/k} = -\alpha_k e_i \ ,$$

где α_k -трансверсальный вектор поля e_i .Но тензоры e_i , g_{ij} заданы.Поэтому ковариантная производная $e_{i|k}$ вектора e_i вполне определенный тензор.Следовательно, α_k тоже известно.Подставив найденные значения для $e_{i|k}$ и $\widetilde{e}_{i|k}$ в последнее уравнение,равносильное уравнению (23),получим

$$(\mu_k \widetilde{t}^k - \mu \alpha_k t^k) e_i + (\mu_k t^k + \mu \alpha_k \widetilde{t}^k - \mu K)\widetilde{e}_i = 0.$$

Это соотношение равносильно системе двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k t^k &= \frac{\mu_k}{\mu} \widetilde{t}_k \ , \\ \alpha_k \widetilde{t}^k &= K - \frac{\mu_k}{\mu} t^k. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Отсюда находим

$$\alpha_i = -\frac{\mu}{K}\left[\mu_k \widetilde{t}^k t_i + (\mu K - \mu_k t^k)\widetilde{t}_i\right]. \qquad (26)$$

Проводя рассуждения в обратном порядке,получим,что из соотношения (26) следует выполнимость условия Петерсона-Кодацци для тензоров g_{ij} и π_{ij} (последний определяется формулой (20)).

Тем самым нами доказана

Т е о р е м а. При выполнении условий (13) и (26) существует единственная минимальная поверхность,для которой заданная квадратичная форма (6) является её метрической формой,а векторное поле (7) характеризует направление,ассоциированное с метрической и аффинной нормалями минимальной поверхности. При этом определяемое формулой (21)

$$\mu = ctg\,\varphi,$$

где φ - угол между аффинной и метрической нормалями.

Л и т е р а т у р а

1 .Каменский Н.П.,К вопросу совпадения метрической и аффинной нормали на гиперповерхности.(Известия Вузов)"Математика",№ 3 (4), стр.107-110,1958.

2.Каменский Н.П.,Обобщение одной задачи для гиперповерхности в E_{n+1}.(Известия Вузов)"Математика" № 3 (34),стр.52-55,1963.

3.Норден А.П.,Теория поверхностей. М.,1956.

4.Рускол Д.Е.,Определение поверхности в трехмерном евклидовом пространстве заданием её 2-й и 4-й основных квадратичных форм. (Ученые записки Калининградского ун-та),вып.1,1969.

5.Рускол Д.Е.,К вопросу определения поверхности в трехмерном евклидовом пространстве заданием метрического тензора и средней кривизны.(Труды семинара по векторному и тензорному анализу),вып.XII,МГУ,1963.