метрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Вып. 20. С. 37-42.

4. И в л е в Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. Вып. 15. С. 32-37.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОТОБРАЖЕНИЙ В P_4

С.В. К и р е е в а
(Московский автодорожный институт)

В данной работе рассматриваются свойства отображения $f: (\Omega \subset P_4) \to (\overline{\Omega} \subset P_4)$, которое имеет два двумерных распределения двойных линий.

В проективном пространстве P_4 заданы две диффеоморфные области $\Omega, \overline{\Omega}$ ($\Omega \cap \overline{\Omega} = \emptyset$). Диффеоморфизм $f: \Omega \to \overline{\Omega}$ переводит точку $A \in \Omega$ в точку $B \in \overline{\Omega}$. Области $\Omega, \overline{\Omega}$ нормализованы в смысле А.П. Нордена одним и тем же семейством гиперплоскостей: $A \to \Pi_3(A)$, $B \to \Pi_3(A)$ ($B \notin \Pi_3(A)$).

Введенные нормализации определяют в областях $\Omega, \overline{\Omega}$ аффинные связности $\nabla, \overline{\nabla}$. Отображение f переводит сеть $\Sigma_4 \subset \Omega$ в сеть $\overline{\Sigma}_4 \subset \overline{\Omega}$. К области $\Omega, \overline{\Omega}$ присоединены подвижные реперы $\mathcal{R}^A = \{A, A_i\}$, $\mathcal{R}^B = \{B, B_i\}$ $(i = \overline{1,4})$, где A_i, B_i – нормальные точки [2] касательных к линиям ω^i, $\overline{\omega}^i$ сетей $\Sigma_4, \overline{\Sigma}_4$. Точки B, B_i в репере $\mathcal{R}^A$ имеют следующие представления:

$$\vec{B} = \vec{A} + \gamma^i \vec{A}_i, \quad \vec{B}_i = \gamma_i^j \vec{A}_j \qquad (i,j,k = 1,2,3,4). \qquad (*)$$

Из результатов работы [3] следует, что если относительные инварианты $\gamma_i^j = 0$ $(i \neq j)$, $\gamma_1^1 = \gamma_2^2 \neq \gamma_3^3$, $\gamma_3^3 = \gamma_4^4$, то в области Ω существуют два распределения Δ_2, $\overline{\Delta}_2$: $\Delta_2(A) = (AA_1A_2)$, $\overline{\Delta}_2(A) = (AA_3A_4)$. Эти распределения характеризуются тем, что любая линия ℓ этих распределений – двойная [1], причем касательные к линиям $\ell, \overline{\ell} = f(\ell)$ пересекаются в точках нормализующей плоскости $\Pi_3(A)$. В данной работе будем исследовать именно такое отображение f. Итак, для отображения f имеем:

$$\vec{B} = \vec{A} + \gamma^i \vec{A}_i, \; \vec{B}_1 = \gamma_1^1 \vec{A}_1, \; \vec{B}_2 = \gamma_1^1 \vec{A}_2, \; \vec{B}_3 = \gamma_3^3 \vec{A}_3, \; \vec{B}_4 = \gamma_3^3 \vec{A}_4; \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \overline{\omega}^i = \omega^i, \; \overline{\omega}_i^0 = \gamma_i^i \omega_i^0, \; \overline{\omega}_i^i = \omega_i^i + (\gamma_i^i)^{-1} \gamma_{im}^i \omega^m + \delta_i^i \gamma^k \omega_k^0, \\ \overline{\omega}_j^i = (\gamma_i^i)^{-1} \gamma_j^j (\omega_j^i - \gamma^i \omega_j^0) \; (i \neq j), \; \omega_i^0 = a_{ik}^0 \omega^k, \; \omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k \; (i \neq j); \end{cases} \qquad (2)$$

$$d\gamma^i - \gamma^i \omega_0^0 - \gamma^i \gamma^j \omega_j^0 + \omega^i + \gamma^j \omega_j^i = \gamma_i^i \omega^i,$$

$$\begin{gathered} d\gamma_i^i - \gamma_i^i (\gamma^k \omega_k^0) - \gamma^i \gamma_i^i \omega_i^0 = \gamma_{ik}^i \omega^k, \\ \gamma_{jk}^i = \omega_j^i (\gamma_j^j - \gamma_i^i) - \gamma^i \gamma_j^j \omega_j^0 \quad (i \neq j), \quad \gamma_{jk}^i = \gamma_{kj}^i. \end{gathered} \qquad (3)$$

Из требований $\gamma_1^1 = \gamma_2^2$ и $\gamma_3^3 = \gamma_4^4$ вытекают конечные соотношения, которые мы здесь не приводим. В работе [3] также показано, что на прямой (AB) существуют инвариантные точки N_i^i: $\vec{N}_i^i = -\gamma_i^i \vec{A} + \vec{B}$. В нашем отображении f на прямой (AB) существуют две различные точки N_1^1, N_3^3 такие, что $(AB, N_1^1 N_3^3) = \gamma_3^3 : \gamma_1^1 \neq 1$. В работе будем предполагать, что точка C: $C = (AB) \cap \Pi_3(A)$, $\vec{C} = \gamma^i \vec{A}_i$ отлична от инвариантных точек N_i^i, т.е. $\gamma_1^1 \neq 1$, $\gamma_3^3 \neq 1$. Дифференциалы точек N_1^1, C имеют вид:

$$\begin{gathered} d\vec{C} = \widetilde{\varphi}\vec{C} + \omega^i (a_{ki}^0 \gamma^k \vec{A} + (\gamma_i^i - 1)\vec{A}_i), \\ d\vec{N}_1^1 = \theta_1^1 \vec{N}_1^1 + \omega^1 (1-\gamma_1^1)^{-1} \gamma_1^1 \gamma^2 (a_{21}^0 - a_{12}^0)\vec{C} + \omega^2 (1-\gamma_1^1)^{-1} \gamma_1^1 \gamma^1 (a_{12}^0 - a_{21}^0)\vec{C} + \omega^3 \Big[(\gamma_3^3 - \gamma_1^1)\vec{A}_3 + \\ + \frac{a_{31}^1 (\gamma_3^3 - \gamma_1^1) + \gamma^1 (\gamma_1^1 a_{13}^0 - \gamma_3^3 a_{31}^0)}{1 - \gamma_1^1} \vec{C} + \omega^4 \Big[(\gamma_3^3 - \gamma_1^1)\vec{A}_4 + \frac{a_{41}^1 (\gamma_3^3 - \gamma_1^1) + \gamma^1 (\gamma_1^1 a_{14}^0 - \gamma_3^3 a_{41}^0)}{1 - \gamma_1^1} \vec{C}\Big]. \end{gathered} \qquad (4)$$

Дифференциал $d\vec{N}_3^3$ имеет вид, аналогичный виду дифференциала $d\vec{N}_1^1$.

Поставим перед собой вопрос: многообразия какой размерности описывают точки N_1^1 и N_3^3 и возможны ли случаи понижения этой размерности? Из формулы (4) следует, что $\dim(N_1^1) < 4$, т.к. касательные к линиям ω^1, ω^2 совпадают.

I случай. Пусть $\dim(N_1^1) = 3$. Нам надо найти такое семейство кривых Γ, что при смещении точки A вдоль линии этого семейства, точка N_1^1 неподвижна. Зададим семейство кривых Γ следующей системой: Γ: $\omega^i = x^i \theta$, θ – параметрическая форма. Тогда $d\vec{A} = \omega_0^0 \vec{A} + \theta(x^i \vec{A}_i)$. Точка N_1^1 будет неподвижна при смещении точки A вдоль линии семейства Γ, если $d\vec{N}_1^1 = \varphi \vec{N}_1^1$. Последнее требование будет выполнено, если $x^1 = \gamma^1$, $x^2 = \gamma^2$, $x^3 = x^4 = 0$, $a_{12}^0 \neq a_{21}^0$, $\gamma^1 \neq 0$, $\gamma^2 \neq 0$. Обратное утверждение тоже справедливо.

Т е о р е м а 1. Размерность многообразия (N_1^1) равна трем тогда и только тогда, когда точки A_1, A_2 не сопряжены в нуль-полярной корреляции $\overset{0}{K}$ ($a_{12}^0 \neq a_{21}^0$) и образ B точки A не принадлежит плоскости распределения $\overline{\Delta}_2(A) = (AA_3A_4)$.

При смещении точки A вдоль линии Γ: $x^1 = \theta\gamma^1$, $x^2 = \theta\gamma^2$, $x^3 = 0$, $x^4 = 0$ точка N_1^1 – неподвижна. Аналогичная теорема верна и для многообразия (N_3^3); для него линия $\widetilde{\Gamma}$ определяется следующим образом: $x^1 = x^2 = 0$; $x^3 = \gamma^3$; $x^4 = \gamma^4$.

Напомним, что $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$ – координаты точки C. Итак, многообразия (N_1^1), (N_3^3) в общем случае имеют размерность, равную трем единицам.

II случай.

Т е о р е м а 2. Размерность многообразия (N_1^1) $\{(N_3^3)\}$ равна двум тогда и только тогда, когда точки A_1, A_2 $\{A_3, A_4\}$ сопряжены в нуль-полярной корреляции $\overset{\circ}{K}$ (т.е. $a^{\circ}_{12}=a^{\circ}_{21}$ $\{a^{\circ}_{34}=a^{\circ}_{43}\}$) и точка B не принадлежит плоскости $\widetilde{\Delta}_2(A)$ $\{\Delta_2(A)\}$ распределения $\widetilde{\Delta}_2$ $\{\Delta_2\}$.

При смещении точки A вдоль любого направления двумерного распределения Δ_2 $\{\widetilde{\Delta}_2\}$ точка N^1_1 $\{N^3_3\}$ -неподвижна.

Следствие. Если связность эквиаффинна $a^{\circ}_{ij}=a^{\circ}_{ji}$, то размерности многообразий (N^1_1), (N^3_3) равны двум.

Теорему 2 можно сформулировать иначе:

Теорема 2. Если точка B не принадлежит плоскостям распределений Δ_2, $\widetilde{\Delta}_2$, то $\dim(N^1_1)$ $\{\dim(N^3_3)\}$ равна двум тогда и только тогда, когда распределение Δ_2 $\{\widetilde{\Delta}_2\}$ голономно.

III случай.

Теорема 3. Размерность многообразия (N^1_1) равна единице тогда и только тогда, когда точка B принадлежит плоскости распределения $\widetilde{\Delta}_2(A)$.

При смещении точки A вдоль любого направления трехмерного распределения Δ_3: $\Delta_3(A)=(AA_1A_2C)$ точка N^1_1 -неподвижна. При этом в общем случае $\dim(N^3_3)=3$. Распределение $\widetilde{\Delta}_2$: $\widetilde{\Delta}_2(A)=(AA_3A_4)$ становится голономным. Плоскости этого распределения касаются поверхности V_2: $\omega^1=0$, $\omega^2=0$, которая является развертывающейся поверхностью. Направление (AB) - единственное асимптотическое направление на ней.

Теорема, аналогичная теореме 3, справедлива для многообразия (N^3_3). Можно показать, что размерности многообразий (N^1_1), (N^3_3) одновременно не могут быть равны единице.

IУ случай. Пусть $\dim(N^1_1)=0$ $\{\dim(N^3_3)=0\}$. Если выполнено требование $N^1_1\neq C$ $\{N^3_3\neq C\}$, то мы придем к противоречивой системе уравнений. Это означает, что для отображения, которое рассматривается в данной работе, точки N^1_1, N^3_3 неподвижными быть не могут.

Библиографический список

I. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, I975. Вып. 6. С. I9-25.

2. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, I976.

3. Киреева С.В. О паре сетей//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, I983. Вып. I4. С. 26-3I.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИЯ ПАР КОНИК СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ АССОЦИИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Л.Г. Корсакова

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются конгруэнции H [I], образующим элементом которых является пара коник, лежащих в различных плоскостях, причем коника C_1 касается линии ℓ пересечения своих плоскостей в точке A_1, а коника C_2 пересекает линию ℓ в точках A_1 и A_2. Плоскости коник образуют двумерные многообразия. Выделен и геометрически охарактеризован один из частных классов конгруэнций H.

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, деривационные формулы которого имеют вид $dA_\alpha=\omega^\beta_\alpha A_\beta$ $(\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,4})$, где линейные дифференциальные формы ω^β_α удовлетворяют уравнениям структуры $D\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma$ и условию эквипроективности $\omega^1_1+\omega^2_2+\omega^3_3+\omega^4_4=0$. Вершины A_3 и A_4 репера R выберем таким образом, чтобы треугольники $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ были автополярными треугольниками второго рода соответственно относительно коник C_1 и C_2.

Определение I. Конгруэнцией H^Q назовем такую конгруэнцию H, в которой каждая коника C_2 конгруэнции (C_2) инцидентна одной квадрике Q.

Уравнения коник C_1, C_2, квадрики Q в репере R при соответствующей нормировке вершин A_α и система дифференциальных уравнений конгруэнции H^Q имеют вид:

$$(x^2)^2-2x^1x^3=0,\quad x^4=0;\qquad (x^4)^2-2x^1x^2=0,\quad x^3=0;$$

$$(x^4)^2-2x^1x^2+x^3(2ax^1+2bx^2+2cx^4+hx^3)=0;$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\omega^1_2=b\omega^3_2,\quad \omega^2_1=a\omega^3_1,\quad \omega^1_4=\omega_2+b\omega^3_4+c\omega^3_2,\\
\omega^2_4=\omega_1+a\omega^3_4+c\omega^3_1,\quad \Omega_2=2c\omega^3_4+a\omega^3_2+b\omega^3_1,\quad \omega^3_1=\Gamma^{3k}_1\omega_k,\\
\omega^3_2=\Gamma^{3k}_2\omega_k,\quad \omega^3_4=\Gamma^{3k}_4\omega_k,\quad \omega^4_3=\Gamma^{4k}_3\omega_k,\quad \omega^1_3=\Gamma^{1k}_3\omega_k,\quad \omega^2_3=\Gamma^{2k}_3\omega_k,\\
\Omega_1=a^k\omega_k,\ da=a(\omega^1_1+\omega^3_3-2\omega^4_4)-2ac\omega^3_4-\omega^2_3+b\omega^2_1+c\omega_1+h\omega^3_1,\\
db=b(\omega^2_2+\omega^3_3-2\omega^4_4)-2bc\omega^3_4-\omega^1_3+a\omega^1_2+c\omega_2+h\omega^3_2,\\
dc=c(\omega^3_3-\omega^4_4)+\omega^4_3+a\omega^1_4+b\omega^2_4+\omega^3_4(h-2c^2),\\
\frac{1}{2}dh=h(\omega^3_3-\omega^4_4)+c\omega^4_3+b\omega^2_3+a\omega^1_3-ch\omega^3_4,
\end{array}\right. \qquad (I)$$