О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ СТРУКТУРЫ МНОЖЕСТВА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

В.С. М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

Определены подмножества простых чисел, последние две или три цифры которых составляют только простые числа из первой, второй или третьей сотни натуральных чисел. Рассмотрены подмножества простых чисел, не теряющих простоты при обратной записи цифр и при неограниченной последовательной перестановке одной цифры простого числа с первого места на последнее.

Найдены закономерности в структуре некоторых подмножеств простых чисел с числом цифр от двух до шести.

§1. Частичная периодичность множества P

На протяжении всей истории математики простые числа привлекали особое внимание. Являясь основными кирпичиками величественного здания «Математика», они «растут среди натуральных чисел как сорная трава, не подчиняясь кажется ничему, кроме случая» ([1], с.44), и никому не раскрывают всех секретов своего строения.

Усилиями многих выдающихся математиков (Евклид, П.Ферма, Р.Декарт, Л.Эйлер, К.Ф.Гаусс, Л.Дирихле, П.Л.Чебышев, И.М.Виноградов и др.) удалось вскрыть глубокие закономерности в структуре множества P простых чисел [2], [3].

При этом основное внимание обращалось на установление асимптотического закона распределения, критериев простоты и решение знаменитой проблемы Гольдбаха-Эйлера о представлении любого натурального числа $n \geq 6$ в виде суммы трех (а для четного числа - двух) натуральных чисел.

Вопросам же периодичности в структуре множества P не уделялось должного внимания из-за твердого убеждения в том, что ее просто не существует.

Рассматривая любую таблицу простых чисел, мы видим, что известные каждому школьнику простые числа из первой сотни натуральных чисел встречаются в виде последних двух цифр на протяжении всей таблицы. Возникает предположение о существовании периодичности таких встреч, а также периодичности появления простых чисел-близнецов из первой сотни натуральных чисел.

Известно, что остаток от деления на 6 любого простого числа $p>3$ равен 5 или 1 (см.[3], с.14). Наименьшим натуральным числом, кратным 100 и 6 является 300. Следовательно, при любом натуральном n число $300n+m$, где m - произвольное натуральное число, меньшее 300, имеет тот же остаток от деления на 6, что и число m.

Единственными не простыми числами, меньшими 300, остаток от деления которых на 6 равен 1 или 5, являются числа следующих трех множеств:

$$A_0=\{1,49,77,91\},\ A_1=\{119,121,133,143,161,169,187\},$$
$$A_2=\{203,209,217,221,247,253,259,287,289,299\}. \qquad (1.1)$$

Множество $A=A_0 \cup A_1 \cup A_2$ состоит из единицы и произведений четырех последовательных простых чисел 7,11,13,17 каждого на себя, а первых трех и на свои последующие простые числа соответственно до 41, 23 и 23 включительно ([3], табл.(2.1)).

Обозначим через C_0 множество простых чисел, больших 5, но меньших 100, через C_k (k=1,2) - множество простых чисел, больших 100k, но меньших 100(k+1), через M_α (α=0,1,2) - объединение множеств A_α и C_α ([3], табл.(2.3), [4], табл.(3,3)). Доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. Для любого натурального числа n и произвольного простого числа $p_{\alpha,n}$ (α=0,1,2) такого, что

$$300n+100\alpha< p_{\alpha,n}<300n+100(\alpha+1), \qquad (1.2)$$

последние две цифры числа $p_{\alpha,n}$ совпадают с последними двумя цифрами одного из чисел множества M_α.

Следствие. Пусть $M^*_\alpha \subset M_\alpha$состоит из тех чисел множества M_α, которые на две единицы меньше своего последующего числа из M_α, а ($p_{\alpha,n}$, $p_{\alpha,n}+2$) - пара простых чисел-близнецов. Тогда последние две цифры числа $p_{\alpha,n}$ совпадают с последними двумя цифрами одного из чисел множества M^*_α.

Обозначим через D_0 множество всех простых чисел, больших 7, но меньших 102, т.е. D_0=(C_0ॐ7)$\cup$101.

Теорема 1.2. Последние две цифры любого простого числа ð$_{0,n}$ такого, что

$$2100n< ð_{0,n} <100+2100n\ (n \in N), \qquad (1.3)$$

образуют двузначное число из D_0 или совпадают с двумя последними цифрами простого числа $101 \in D_0$.

Доказательство. Числа 2100n+q (q=7,49,77,91) - составные. Поэтому (в силу теоремы 1.1) две последние цифры простого числа ð$_{0,n}$ не могут быть 07, 49, 77 и 91, а значит они образуют двузначное простое число из D_0 или являются последними двумя цифрами простого числа $101 \in D_0$.

Например, для n=1, 10, 100, 1000 получаем соответственно совокупности простых чисел:

ð $_{0,1}$	2111	2113	2129	2131	2137	2141	2143	2153	2161	2179
ð $_{0,10}$	21001 21011	21013	21017	21019	21023	21031	21059	21061	21067	21089
ð $_{0,100}$	210011	210019	210031	210037	210053	210071	210097			
ð $_{0,1000}$	2100001	2100011	2100031	2100041	2100053	2100071	2100079	2100097		

Теорема 1.3. Последние три цифры любого простого числа ð$_{k,n}$ (k=1,2) такого, что

$$3003000n+100< ð_{1,n} <3003000n+200, \qquad (1.5)$$

$$51051000n+200< ð_{2,n} <51051000+300, \qquad (1.6)$$

образуют трехзначное простое число из множества C_k.

Доказательство. Так как $3003000=7\cdot 11\cdot 13\cdot 3000$, $51051000=7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 3000$, то сумма первого (второго) из этих чисел с любым составным числом из множества $M_1(M_2)$ является составным числом. Значит, три последние цифры простого числа $\tilde{p}_{k,n}$ (в силу теоремы 1.1) образуют простое число из множества C_k $(k=1,2)$.

Например,

$\{\tilde{p}_{1,1}\}=\{3003\underline{113},3003\underline{131},3003\underline{149},3003\underline{157},3003\underline{167},3003\underline{173},3003\underline{181},3003\underline{191}\}$,

$\{\tilde{p}_{1,2}\}=\{6006\underline{127},6006\underline{137},6006\underline{149},6006\underline{163}\}$,

$\{\tilde{p}_{1,3}\}=\{9009\underline{103},9009\underline{107},9009\underline{157},9009\underline{163},9009\underline{179},9009\underline{191},9009\underline{199}\}$,

$\{\tilde{p}_{2,1}\}=\{51051\underline{241}\}$, $\{\tilde{P}_{2,2}\}=\{102102\underline{229},102102\underline{239},102102\underline{241},102102\underline{269}\}$,

$\{\tilde{p}_{2,3}\}=\{153153\underline{227},153153\underline{233},153153\underline{241},153153\underline{283},153153\underline{293}\}$.

Из теоремы 1.3 непосредственно следует, что при любом натуральном n число из двух (трех) последних цифр меньшего из простых чисел-близнецов $(\tilde{p}_{\alpha,n},\tilde{p}_{\alpha,n}+2)$ является меньшим простым числом пары близнецов из C_α.

Например, простыми числами-близнецами в $\{\tilde{p}_{0,1}\}$ и $\{\tilde{p}_{2,2}\}$ соответственно являются:

$(21\underline{11},21\underline{13})$, $(21\underline{29},21\underline{31})$, $(21\underline{41},21\underline{43})$;

$(102102\underline{239}, 102102\underline{241})$.

§2. Полиндромические и квазиполиндромические свойства простых чисел

Обозначим через φ отображение множества N натуральных чисел на себя, при котором цифры образа $m^*=\varphi(m)$ числа $m\in N$ являются записанными в обратном порядке цифрами этого числа. Например,

$$\varphi(14153)=35141. \tag{2.1}$$

Каждое простое число полиндром m ([3],с.34) характеризуется условием

$$\varphi(m)=m. \tag{2.2}$$

Отображение φ-инволютивное, так как

$$\forall m\in N\ \varphi(\varphi(m))=m . \tag{2.3}$$

Определение 2.1. Говорят, что простое число p обладает полиндромическим свойством, если его образ при отображении φ, т.е. число $\varphi(p)$ является простым.

Очевидно, что любое простое число полиндром обладает полиндромическим свойством.

Обозначим через $\wp_h^*$ $(h\in N_0=N\cup 0)$ - множество простых чисел p, удовлетворяющих неравенствам:

$$100h<p<100(h+1), \tag{2.4}$$

а через $\wp_h$ - максимальное подмножество этого множества, в котором каждое простое число обладает полиндромическим свойством. Например,

$\wp_0=\{11,13,17,31,37,71,73,79,97\}$,

$\wp_7=\{701,709,727,733,739,743,751,757,761,769,787,797\}$, (2.5)

⚐$_{12}$ ={1201,1213,1217,1223,1229,1231,1237,1249,1259,1279,1283},

⚐$_{100}$ ={10007,10009,10039,10061,10067.10069,10079,10091}.

Обозначим через ψ отображение множества N на себя, состоящее в перестановке первой цифры числа $m \in N$ на последнее место. Например, ψ (1257)=2571.

Определение 2.2. Простое число p называется простым квазиполиндромом, если при любом натуральном $k \in N$ числа

$$p_1=\psi(p),\ p_2=\psi(p_1),\ldots,p_k=\psi(p_{k-1}) \tag{2.6}$$

являются простыми.

Если простое число p имеет n цифр, то

$$p_n=\psi(p_{n-1})=p. \tag{2.7}$$

Следовательно простое число p из n цифр тогда и только тогда является простым квазиполиндромом, когда $p_1 \in P$, $p_2 \in P$,..., $p_{n-1} \in P$.

Очевидно, все числа множества ⚐$_0$ являются простыми квазиполиндромами.

Если p - простой квазиполиндром, то каждое из чисел $p_1=\psi(p)$, $p_2=\psi(p_1)$, ..., $p_{n-1}=\psi(p_{n-2})$ также являются простыми квазиполиндромами. Такие квазиполиндромы называются родственными.

Существует всего 15 неродственных квазиполиндромов, больших 10, но меньших 10000000:

$$11,13,17,37,79;113,197,199,337;1193,3779;11939,19937;193939;199933. \tag{2.8}$$

Используя компьютеры, можно определить все простые квазиполиндромы, меньшие достаточно большого натурального числа m.

§3. Структура некоторых подмножеств простых чисел

Разобьем множество первых девяти натуральных чисел, т.е. множество всех цифр, отличных от нуля, на два подмножества:

$$H_1=\{1,3,7,9\},\ H_2=\{2,4,5,6,8\}\ . \tag{3.1}$$

Последняя цифра любого простого числа p>5 является элементом множества H_1.

Множества H_1 и H_2 позволяют простыми способами получать различные подмножества простых чисел. Например, только простые числа получатся, если: 1) 1 или 10 поставить перед каждой цифрой множества H_1, а цифру 7 перед или после каждой из остальных цифр этого множества; 2) между цифрами любого из первых четырех двузначных простых чисел вставить 0 или 9; 3) заменить в H_1 единицу числами множества H_2 с нечетными порядковыми номерами, или цифру 9 - с четными, и приписать к ним справа по одной из оставшихся цифр множества H_1, расположенных на нечетных местах; 4) приписать справа к последовательным натуральным числам от 11 до 16 включительно по цифре из H_1 (кроме 1) соответственно сначала слева направо, а потом наоборот:

113,127,139,149,157,163;

5) к единице приписать справа любые две цифры из остальных цифр множества H_1 (в прямом и обратном порядке); 6) к удвоенной двойке приписать справа любую цифру множества H_1, кроме единицы или к удвоенной цифре из H_1, кроме 9, слева приписать 2; 7) к 2 приписать справа любое утроенное нечетное число от 11 до 27 включительно, кроме 15 и 25 (т.е. кратных 5); 8) три последовательных числа Фибоначчи 3,5,8 и цифру 9 окаймить единицами; 9) между цифрами простых чисел 13 и 17 вставить одну, две или три девятки, а между цифрами простого числа 97 один, два, три или четыре нуля.

Отметим любопытные закономерности в структуре некоторых подмножеств простых чисел с числом цифр от двух до шести включительно:

19	23	499	449	31	557	59
199	233	4999	44449	331	5557	599
1999	2333	49999	444449	3331	555557	59999
199999	23333			33331		599999
				333331		

2111	277	991	13	11113	37	3373
4111	577	99991	31	11131	73	3733
8111	677	9999991	113	11311	337	7333
10111	877		131	311111	373	333337
16111	977		311	131111	733	733333
				113111		

47777	97777	131	10301
77477	77977	1031	13001
77747	77797	1301	

Из шести трехзначных чисел с цифрами **1**,**3**,**7** три числа - простые:

$$\mathbf{137,317,173,} \qquad (3.1)$$

остальные три - составные, являющиеся полиндромическими образами простых чисел из (3.1):

$$\mathbf{731=\varphi(137),713=\varphi(317),371=\varphi(173).} \qquad (3.2)$$

Трехзначные натуральные числа (3.1), (3.2) определяют многие простые числа с использованием легко запоминающихся приемов.

Все трехзначные простые числа с попарно различными цифрами из множества $\mathbf{H_1}$ состоят из чисел (3.1) и чисел, получающихся из них заменой девяткой любой цифры в первом числе, второй цифры - во втором и третьем числах, последней цифры - в третьем и в каждом из трех чисел (3.2), ïåðâoé - в 371:

$$\mathbf{937,197,139,397,193,179,739,719,379,971}. \qquad (3.3)$$

Все четырехзначные простые числа с попарно различными цифрами из множества $\mathbf{H}_1$ получаются вставкой девятки перед **137,173,371**, после **371**, а также между первыми двумя (последними двумя) цифрами чисел **317,173** (числа **713**):

9137,9173,9371,3719,3917,1973,7193, (3.4)

причем два наименьших из этих чисел и число **9173** образуют девять шестизначных простых чисел следующим образом:

11**1973**	11**3719**	11**9173**	
33**1973**	33**3719**	33**9173**	(3.5)
77**1973**	77**3719**	77**9173**	

Структура простых чисел (3.3), (3.4), (3.5) и нижеприведенные таблицы простых чисел убедительно показывают роль натуральных чисел (3.1), (3.2), и особенно числа **137**, в их строении.

Четырехзначные простые числа

11**7**1	**2**137	**2**371	73**2**1	
33**1**3	1**2**37	3**2**71	1**6**37	
77**17**	13**2**7	**2**713	13**6**7	(3.6)
333**1**	**3**137	7**2**13	**6**317	
117**1**	137**3**	**2**731	**6**173	

Пятизначные простые числа

99**137**	99**371**	11**317**	11**173**	**713**33	**1**1**317**	
199**37**	**39971**	33**317**	**173**33	**731**33	**1**33**37**	(3.7)
13997	**37991**	77**317**	**173**77	**137**11	**1**7**37**7	
13799	**371**99	99**317**	33**713**	11**731**		

Шестизначные простые числа

137713	**731**713	**731**173	711**317**	711**713**	(3.8)
317731	173**137**	**317**371	711**173**	711**371**	

Семизначные простые числа

1371**137**	**731**1**113**	1**137137**	1**317317**	
1373**137**	**731**3**113**	3**137137**	1**173173**	(3.9)
1377**137**	**731**7**113**	6**137137**	**173**1**113**	
1379**137**	**173**3**113**			

Рассмотрим две тройки трехзначных натуральных чисел

{**113 131 311**} , (3.10)

{**119 191 911**} . (3.11)

Каждая из этих троек инвариантна относительно полиндромического отображения φ. Множество (3.10) состоит из всех трехзначных простых чисел, имеющих одну цифру тройку, а две - единицы. Множество (3.11) получается из (3.10) заменой в каждом из трех чисел тройки на девятку. Оно состоит из двух простых чисел и одного составного - числа **119.**

Используя шесть чисел (3.10), (3.11), цифры **3,9** и их взаимную замену в числах, можно получать простые числа различных разрядов легко запоминающимися приемами.

Следующие натуральные числа являются простыми.

11**9**3	**9**311	**39**113	**33**113	**33**911	311**39**	**99**131
1**9**13	3**9**11	1**39**13	**33**311	1**33**13	311**93**	**99**119
131**9**	31**9**1	11**39**3	**33**191	13**33**1	911**93**	**99**191
1**9**31	311**9**	119**39**	**33**119	119**33**	911**39**	1**99**91

113**933**	311**3333**	131**3339**	119**3399**	911**3399**
131**933**	311**3339**	131**3999**	119**3939**	911**3999**
931313	311**3393**	131**9333**	119**3993**	911**9333**
333131	311**3399**	131**9399**	119**9993**	911**9399**
333911	311**3939**	131**9933**	119**9999**	911**9933**
391**33**1	**3333**311	**3333**131	191**3939**	**3399**911
91**333**1	**3393**311	**3339**131	191**3993**	**3993**911
399911	**3399**311	**3399**131	191**3999**	

§4. О простых числах, определяемых натуральными числами 3n и 3n$_0$+2 ($n\in N$, $n_0\in N\cup 0$)

Если натуральное число **m** кратно **3** (сравнимо с **2** по модулю **3**), то число следующего разряда, полученное приписыванием справа цифры **3** или **9** (**1** или **7**) будет составным - кратным **3**. Так как любое простое число **p**>**5** имеет последней цифрой одну из цифр множества **H_1={1,3,7,9}**, то для **m=3n** простые числа могут возникнуть только приписыванием справа цифры **1** или **7**, а для **m=3n$_0$+2** - только цифры **3** или **9**.

Натуральное число $\overline{m}$**,** образованное последовательной записью цифр любого конечного числа слагаемых числа **m**, имеет при делении на **3** тот же остаток, что и число **m**. Таким образом, задав при любом **$n\in N$** число **3n** или **3n$_0$+2** и осуществляя разбиение его на два, три и т.д. слагаемых, можно присоединением справа к числу соответствующей цифры получать простые числа со значительным уменьшением количества чисел, проверяемых «на простоту». Это позволяет упростить компьютерную программу нахождения простых чисел.

Рассмотрим, например, случаи **m=2** и **m=3**, ограничиваясь разбиением этих чисел до трех слагаемых:

$$\mathbf{2},\ \mathbf{2+0},\ \mathbf{1+1},\ \mathbf{2+0+0},\ \mathbf{1+0+1},\ \mathbf{1+1+0}, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{3},\ \mathbf{3+0},\ \mathbf{1+2},\ \mathbf{2+1},\ \mathbf{3+0+0},\ \mathbf{1+0+2},\ \mathbf{2+0+1},\ \mathbf{1+2+0},\ \mathbf{2+1+0},\ \mathbf{1+1+1}. \tag{4.2}$$

Получаем (после проверки на «простоту») следующие простые числа:

$$\mathbf{23},\ \mathbf{29};\ \mathbf{113};\ \mathbf{2003};\ \mathbf{1013};\ \mathbf{1019};\ \mathbf{1103};\ \mathbf{1109}; \tag{4.3}$$

31, **37**; **307**; **127**; **211**; **3001**; **1021**; **2011**; **2017**; **1201**; **1117**. (4.4)

Для **m=5** и **m=6** получаем соответственно **23** и **29** простых чисел, осуществляя аналогичное разбиение этих чисел на два и три слагаемых.

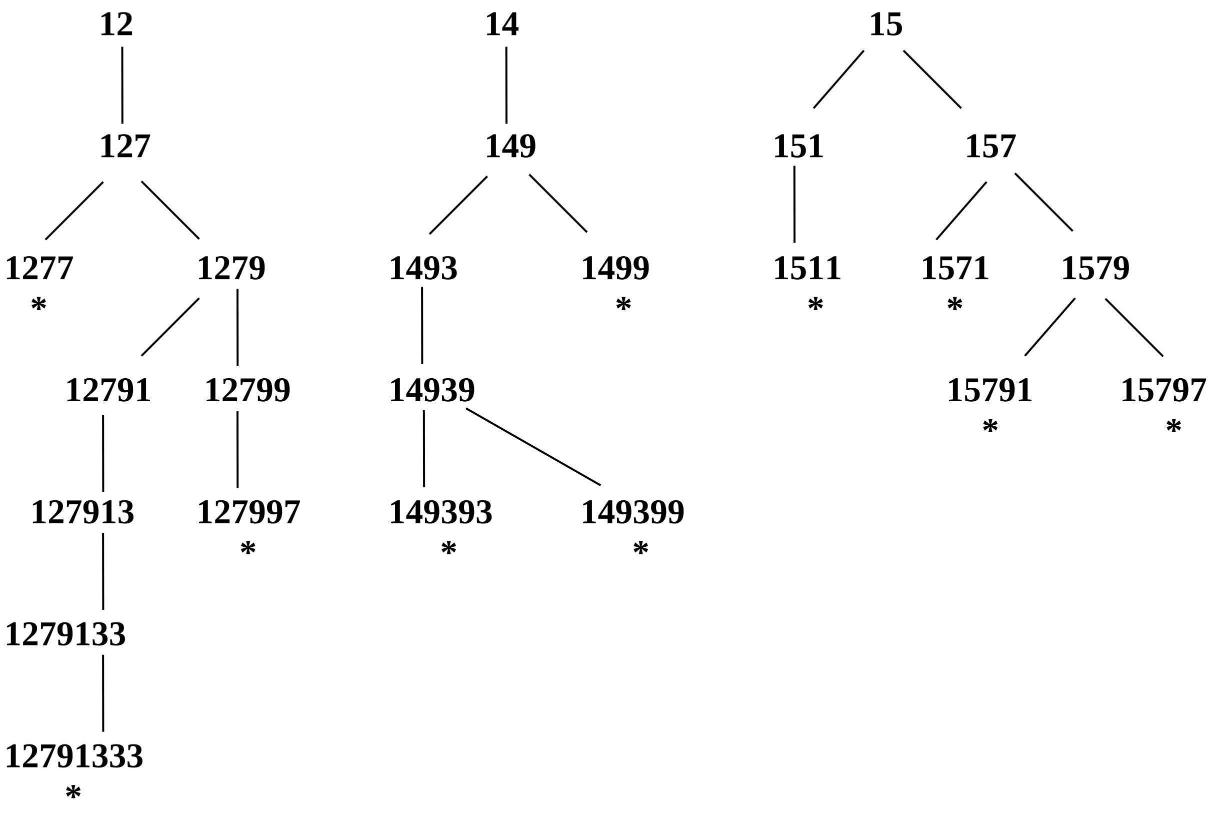
§5 Непрерывные последовательности простых чисел

Определение 5.1 Натуральное число **n** называется пролонгируемым, если существует хотя бы одно простое число, получаемое приписыванием к числу **n** справа одной цифры (пролонгированием). Если же нет ни одного такого простого числа, то натуральное число **n** называется непролонгируемым.

Среди натуральных чисел первой сотни только числа **20**, **32**, **51**, **53**, **62**, **84**, **89** являются непролонгируемыми.

Определение 5.2 Последовательность $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_k\}$ простых чисел называется непрерывной индекса **k**, если каждое число $\mathbf{p}_{m+1}$ получено пролонгированием числа $\mathbf{p}_m$ $(m = \overline{1, k-1})$, а простое число $\mathbf{p}_k$ непролонгируемо.

Каждое пролонгируемое натуральное число **n** порождает «дерево» простых чисел, ветвями которого являются непрерывные последовательности простых чисел. Например, деревья чисел **12**, **14**, **15** имеют вид:



Здесь символом * обозначен конец соответствующей непрерывной последовательности простых чисел.

Определение 5.3 Индексом $\mathbf{i}_n$ натурального числа **n** называется максимальный индекс непрерывных последовательностей простых чисел, порождаемых этим числом. Индекс непролонгируемого составного (простого) числа, по определению, равен нулю (единице).

Определение 5.4 Степенью разветвленности $\mathbf{b_n}$ натурального числа **n** называется число непрерывных последовательностей простых чисел (число ветвей), порождаемых этим числом.

Степень разветвленности непролонгируемого натурального числа **n**, по определению, равна нулю.

Определение 5.5. Суммарным индексом $\mathbf{s_n}$ натурального числа **n** называется число попарно различных простых чисел, содержащихся во всех непрерывных последовательностях простых чисел, порожденных этим числом. По определению, $\mathbf{s_n=0}$ ($\mathbf{s_n=1}$), если **n** - непролонгируемое составное (простое) число.

Таким образом, всякому $\mathbf{n\in N}$ соответствует единственная упорядоченная тройка целых неотрицательных чисел: $\mathbf{n= n(i_n,\ b_n,\ s_n)}$. Например, **1**(9, 24,63); **10**(10, 21, 54); **19**(9, 15, 41); **100**(10, 8, 26). Всем непролонгируемым составным (простым) числам соответствует нулевая точка (0, 0, 0) (точка (1, 0, 1)).

Анализируя с помощью компьютера деревья всех чисел, меньших одного миллиона, убеждаемся, что максимальный индекс **12** имеет только одно число **145701**(12, 4, 15), а максимальная степень разветвленности **24** и максимальный суммарный индекс **63** только у единицы. Индекс **11** лишь у шести чисел: **40**(11, 11, 34); **409**(11, 9, 29); **6804**(11, 5, 15); **68041**(11, 5, 15); **189037**(11, 12, 24); **840296**(11, 3, 13).

Библиографический список

1. *Боро В., Цагир Д., Рольфс Ю., Крафт Х., Янцен Е.* Живые числа. М.: Мир, 1985. 126 с.

2. *Трост Э.* Простые числа. М., 1959.

3. *Малаховский В.С.* Эти загадочные простые числа. Калининград: Янтарный сказ, 1998. 54 с.

4. *Малаховский В.С.* О дискретных семействах парабол и точек, ассоциированных с подмножествами простых чиссел // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1998. Вып.29. С.41-45.

V.S. M a l a k h o v s k y

ON SOME FEATURES OF PRIME NUMBERS SET

Subsets of prime numbers, last two or three numeral of which form only prime numbers out of 1-st, 2-nd or 3-rd hundred of natural numbers, are defined. Subsets of prime numbers are considered, which remain prime ones under reverse writing down

of numerals and under unlimited consecutive permutation of a numeral of prime number from the 1-st place to the last one.

The appropriatenesses in structure of some prime numbers subsets with quantity of numerals from two to six are found. For each natural number n a «tree» of prime numbers is constructed.

УДК 514.75

ВЫРОЖДЕННЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

К.В. П о л я к о в а

(*Калининградский государственный университет*)

Поверхность проективного пространства рассмотрена как многообразие точек. Произведено оснащение Бортолотти этой поверхности, которое позволило задать центропроективные связности 2-х типов. Условия их совпадения фиксируют гиперплоскость Бортолотти. Эти условия являются необходимыми и достаточными для обращения в нуль псевдотензора кривизны индуцированной центропроективной связности. Описаны параллельные перенесения гиперплоскости Бортолотти в связностях обоих типов, которые оказались вырожденными.

1. **Центропроективная связность.** Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $R=\{A,A_I\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I A + \omega_I^J A_J \quad (I,J,K=\overline{1,n}),$$

причем базисные формы ω^I, ω_I, ω_J^I проективной группы GP(n) удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad d\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$

$$d\omega_J^I = \omega_J \wedge \omega^I + \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K.$$

В проективном пространстве P_n рассмотрим поверхность X_m ($1 \le m < n$) как m-мерное многообразие точек. Произведем специализацию подвижного репера R, совмещая вершину A с точкой, описывающей поверхность X_m . Система дифференциальных уравнений поверхности X_m в полученном репере R^0 нулевого порядка имеет вид:

$$\omega^a = \Lambda_i^a \omega^i, \tag{1}$$

где $i,j,k=\overline{1,m}$; $a,b,c=\overline{m+1,n}$. Базисные формы ω^i поверхности X_n удовлетворят структурным уравнениям

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \overline{\omega}_j^i, \tag{2}$$