УДК 519.612.2

Е. А. Васильева

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И УТОЧНЕННЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ КАСАТЕЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия
Поступила в редакцию 06.06.2022 г.
Принята к публикации 22.06.2022 г.

Для цитирования*:* *Васильева Е. А.* Оптимальные параметры и уточненные оценки скорости сходимости касательного разложения // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер. Физико-математические и технические науки. 2022. №1. С. 77—89.

Детально исследуются свойства касательного неполного блочного разложения. Предлагается аналитический метод нахождения оптимальных значений параметра разложения и соответствующих им уточненных оценок скорости сходимости для широкого класса модельных задач. Численные исследования показывают, что использование найденных значений параметра для построения касательного разложения позволяет достичь высокой скорости сходимости и при решении задач с переменными коэффициентами.

Ключевые слова*:* неполное блочное разложение, касательное разложение, предобуславливатель, матрицы

Введение

Построение эффективных методов решения систем алгебраических уравнений, возникающих при дискретизации эллиптических уравнений, является актуальной задачей численного анализа. К решению краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа сводятся, например, задачи диффузии [2; 3] и транспорта лекарственных веществ через биологические мембраны [4; 5], расчет потенциала электростатического поля [6; 7], стационарного распределения температуры [8; 9] и др.

В результате дискретизации дифференциальных уравнений возникают системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), матрицы которых имеют разреженную структуру. Наиболее популярными методами решения СЛАУ с разреженными матрицами являются многосеточные методы [10] и методы декомпозиции области [11]. Их скорость сходимости практически не зависит от размера сетки, а количество вычислительных действий на расчетный узел является постоянной величиной [12]. Главным недостатком этих методов является отсутствие робастности или, другими словами, сильная зависимость скорости сходимости от коэффициентов дифференциального уравнения. Для многосеточных методов попытки уменьшить данную зависимость способствовали созданию алгебраических многосеточных методов [13; 14], совершенствованию сглаживателей [15] и разработке более эффективных методов решения на грубых сетках.

В данной статье мы рассмотрим так называемое касательное неполное блочное разложение [1], доказавшее свою эффективность для решения на сетках среднего размера, которое может быть, в частности, использовано в качестве солвера на грубой сетке в многосеточном методе. Этот метод перекликается с методами, рассмотренными в [16—20]. Он обладает как робастностью, так и слабой зависимостью от числа узлов расчетной сетки (см., напр., [1; 19] и др.).

Скорость сходимости касательного разложения зависит от выбора его параметра, поэтому для получения высокой скорости сходимости важно уметь определять оптимальное значение этого параметра, что, в свою очередь, требует получения оценки нормы итерационного оператора. Для задач с переменными коэффициентами получение и исследование такой оценки не представляются возможными, однако проведенный анализ численных результатов показал, что для задач общего вида в качестве значений параметра касательного разложения хорошо подходят оптимальные значения этого параметра для задач с постоянными коэффициентами (так называемых модельных задач).

В [17] была получена асимптотическая оценка нормы итерационного оператора для случая, когда число блоков матрицы системы неограниченно возрастает, а сами блоки являются положительно определенными. Практические исследования показали, что при небольшом числе блоков в матрице системы оптимальные значения параметра и получаемая скорость сходимости сильно отличаются от асимптотических.

Позднее в [21] были получены обобщенные оценки нормы оператора перехода, учитывающие количество блоков в матрице системы и не требующие их положительной определенности. Это позволило оценить, в частности, скорость сходимости касательного разложения, если при дискретизации краевой задачи используется девятиточечный шаблон, так как не все блоки матрицы системы в этом случае являются положительно определенными матрицами.

Данная статья посвящена исследованию оценок, полученных в [21], для широкого ряда модельных задач и аналитическому решению задачи нахождения оптимальных значений параметра касательного разложения. Численные исследования показывают, что полученные результаты очень близки численным, вычисленным при тех же значениях параметра.

Поясним основную идею метода касательного разложения, рассмотрев систему уравнений

$$\mathbf{Ku} \quad = \mathbf{F}$$

с положительно определенной блочной трехдиагональной матрицей

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & -\mathbf{L}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathbf{L}_1 & \mathbf{D}_2 & -\mathbf{L}_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{D}_{m-1} & -\mathbf{L}_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -\mathbf{L}_{m-1} & \mathbf{D}_m \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{D}_j, \mathbf{L}_j$ – квадратные $n \times n$ матрицы. Векторы **u** и **F** имеют вид

$$\mathbf{u} = \text{blockdiag}\{\mathbf{u}_j\}, \ \ \mathbf{F} = \text{blockdiag}\{\mathbf{F}_j\} \text{ и } \mathbf{u}_j, \mathbf{F}_j \in \Re^n .$$

Для матрицы **K** полное блочное разложение можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{L} + \mathbf{T})\, \mathbf{T}^{-1}\, (\mathbf{U} + \mathbf{T}),$$

где **L** и **U** — соответственно нижняя и верхняя блочно-треугольные матрицы, а **T** — блочно-диагональная матрица

$$\mathbf{T} = \text{blockdiag}\{\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_m\},$$

причем

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{D}_1, \quad \mathbf{T}_j = \mathbf{D}_j - \mathbf{L}_{j-1}\mathbf{T}_{j-1}^{-1}\mathbf{L}_{j-1}, \quad j > 1. \qquad (1)$$

Заменив блоки $\mathbf{T}_j$ их некоторой аппроксимацией $\tilde{\mathbf{T}}_j$, мы получим неполное блочное разложение матрицы **K**. Для модельной задачи, для которой матрица **K** имеет вид

$$\mathbf{K} = \text{blocktridiag}\{-\mathbf{I}, \quad \mathbf{C}, \quad -\mathbf{I}\},$$

блоки $\mathbf{T}_j$ можно представить как рациональные функции $\mathbf{T}_j = f_j(\mathbf{C})$, где

$$f_1(\lambda) = 1, \quad f_j(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{f_{j-1}(\lambda)}, \quad j > 1. \qquad (2)$$

Заменяя функции $f_j(\lambda)$ на касательные к ним в точке $\left(\lambda^*, f_j(\lambda^*)\right)$, мы придем к касательному разложению, заданному параметром λ^*, для которого

$$\tilde{\mathbf{T}}_1 = \mathbf{C}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_j = f_j(\lambda^*)\,\mathbf{I} + f_j'(\lambda^*)(\mathbf{C} - \lambda^*\mathbf{I}), \quad j > 1.$$

Учитывая (2), можно показать (см., напр., {{кас}}, {{двухч}}), что блоки $\tilde{\mathbf{T}}_j$ могут быть рассчитаны по следующим рекуррентным формулам:

$$\tilde{\mathbf{T}}_1 = \mathbf{C}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_j = \mathbf{C} + \left(\mu_{j-1}^*\right)^2 \tilde{\mathbf{T}}_{j-1} - 2\mu_{j-1}^* \mathbf{I}, \quad j > 1, \tag{3}$$

где $\mu_j^* = 1/ f_j(\lambda^*)$, $j \geq 1$, или в явном виде

$$\mu_1^* = \lambda^*, \quad \mu_j^* = \lambda^* \Big/ \left(1 - \lambda^* \mu_{j-1}^*\right), \quad j > 1. \tag{4}$$

Данное определение допускает обобщение для задач с переменными коэффициентами. В этом случае параметром касательного разложения является некоторый тестовый вектор $\mathbf{e}^*$, а параметры μ_j^* из (3) вычисляются по формулам

$$\mu_j^* = \left(\mathbf{L}_j \mathbf{e}^*, \mathbf{e}^*\right) \Big/ \left(\tilde{\mathbf{T}}_j \mathbf{e}^*, \mathbf{e}^*\right).$$

Оптимальные параметры и точные оценки скорости сходимости

В [21] была получена следующая оценка нормы итерационного оператора для модельной задачи:

$$\|\mathbf{S}\|_{\mathbf{K}} \leq \max_{\nu_{\min} \leq \nu \leq \nu_{\max}} S_{\nu^*}(\nu), \tag{5}$$

где

$$\nu_{\min} = \frac{1 - 2\lambda_{\max}}{1 + 2\lambda_{\max}}, \quad \nu_{\max} = \frac{1 - 2\lambda_{\min}}{1 + 2\lambda_{\min}},$$

$\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ — соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы **C**, а функция $S_{\nu^*}(\nu)$ имеет вид

$$S_{\nu^*}(\nu) = \begin{cases} \dfrac{(\nu - \nu^*)^2}{(\nu(1 + 2\sqrt{\nu^*}) + \nu^*)^2 + 4\delta\sqrt{\nu^*}(1 + \sqrt{\nu^*})(\nu + \sqrt{\nu^*})(1 - \nu)}, & 0 < \nu \leq 1, \\[2ex] \dfrac{(\nu - \nu^*)^2}{(\nu(1 + 2\sqrt{\nu^*} + \nu^*)^2 + 4\delta\sqrt{\nu^*}(1 + \sqrt{\nu^*})(\nu + \sqrt{\nu^*})(\nu - 1)}, & \nu \geq 1, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\delta = \sin^2 \frac{\pi}{2m}, \quad m - \text{количество блоков.}$$

Для нахождения оптимальных значений параметра касательного разложения и соответствующих им оценок нормы итерационного оператора требуется решить следующую минимизационную задачу:

$$\max_{\nu_{\min} \leq \nu \leq \nu_{\max}} S_{\nu^*}(\nu) = \min. \tag{7}$$

Данная статья посвящена ее аналитическому решению.

Функция $S_{\nu^*}(\nu)$ принимает экстремальные значения на концах отрезка $[\nu_{\min}, \nu_{\max}]$. Таким образом, мы можем вычислить оптимальные параметры и оценки нормы итерационного оператора касательного разложения для модельной задачи, решив численно уравнение

$$S_{\nu^*}(\nu_{\min}) = S_{\nu^*}(\nu_{\max}). \tag{8}$$

С помощью уравнения (8) найдем качественные оценки скорости сходимости и оптимальные параметры касательного разложения для модельной задачи. Для этого перепишем функцию $S_{\nu^{(1)}}(\nu)$ в эквивалентном виде:

$$S_{\nu^*}(\nu) = P_{\nu^*}(\nu) / (1 + P_{\nu^*}(\nu)), \tag{9}$$

где функция $P_{\nu^*}(\nu)$ имеет вид

$$P_{\nu^*}(\nu) = \begin{cases} \dfrac{(\nu-\nu^*)^2}{4\sqrt{\nu^*}(1+\sqrt{\nu^*})(\nu+\nu^*)((1-\delta)\nu+\delta)}, & 0<\nu\le 1, \\ \dfrac{(\nu-\nu^*)^2}{4\sqrt{\nu^*}(1+\sqrt{\nu^*})(\nu+\nu^*)(\delta\nu+(1-\delta))}, & \nu>1. \end{cases} \tag{10}$$

Так как функция $x/(1+x)$ возрастает при $x \ge 0$, то минимизационную задачу (7) можно свести к следующей эквивалентной задаче:

$$\max_{\nu_{\min}\le\nu\le\nu_{\max}} P_{\nu^*}(\nu) = \min.$$

Таким образом, оптимальный параметр ν^* можно найти из уравнения

$$P_{\nu^*}(\nu_{\min}) = P_{\nu^*}(\nu_{\max}), \tag{11}$$

и в зависимости от значений $\nu_{\min}$ и $\nu_{\max}$ мы получим три различных варианта оценок.

1. Пусть $0<\nu_{\min}, \nu_{\max} \le 1$. Тогда уравнение (11) примет вид

$$\frac{(\nu_{\min}-\nu^*)^2}{(\nu_{\min}+\nu^*)(\nu_{\min}+\xi)} = \frac{(\nu_{\max}-\nu^*)^2}{(\nu_{\max}+\nu^*)(\nu_{\max}+\xi)}, \tag{12}$$

где $\xi = \delta/(1-\delta)$. После преобразований, обозначив за $x=\sqrt{\nu^*}$, получим

$$x^5 + (c+\xi)x^4 + 2\xi x^3 + 2dx^2 + (d-\xi c)x + \xi d = 0, \tag{13}$$

где $c = \nu_{\min} + \nu_{\max}$, $d = -\nu_{\min}\nu_{\max}$. Решив данное уравнение на интервале $(\sqrt{\nu_{\min}}, \sqrt{\nu_{\max}})$, мы найдем оптимальный параметр ν^*. Подставив его в уравнение (12), найдем скорость сходимости. Уравнение (13) допускает приближенное аналитическое решение, которое может быть найдено при помощи так называемого параллелограмма Ньютона [22]. Используя это правило выбора главных членов для уравнения (13), получим

$$(c+\xi)x^4 + (d-\xi c)x = 0.$$

Откуда следует, что

$$x_{\text{опт}} = \left(\frac{(\nu_{\min}\nu_{\max} + \xi(\nu_{\min} + \nu_{\max})}{(\nu_{\min} + \nu_{\max}) + \xi} \right)^{\frac{1}{3}} \approx (\nu_{\min} + \xi),$$

а параметр

$$\nu^*_{\text{опт}} \approx (\nu_{\min} + \delta)^{\frac{2}{3}}. \tag{14}$$

Подставим найденное значение $\nu^*_{\text{опт}}$ в (10) и вынесем в знаменателе множитель $(1-\delta)$. Тогда, пренебрегая в числителе $\nu_{\min}$ по отношению к $\nu^*_{\text{опт}}$, а в знаменателе $\sqrt{\nu^*_{\text{опт}}}$ по сравнению с единицей в третьем сомножителе и $\nu_{\min}$ по сравнению с $\sqrt{\nu^*_{\text{опт}}}$, получим следующее значение функции:

$$P_{\nu^*_{\text{опт}}}(\nu_{\min}) \approx \frac{\nu^*_{\text{опт}}}{4(\nu_{\min} + \xi)},$$

откуда в силу равенства (9) следует, что

$$S_{\nu^*_{\text{опт}}}(\nu_{\min}) \approx \frac{1}{1 + 4(\nu_{\min} + \xi)^{\frac{1}{3}}}.$$

Отсюда получаем следующую оценку нормы итерационного оператора:

$$\|\mathbf{S}\|_{\mathbf{K}} \le 1 - 4(\nu_{\min} + \delta)^{\frac{1}{3}}.$$

2. Рассмотрим случай, когда оба экстремальных значения не меньше единицы $\nu_{\min}, \nu_{\max} \ge 1.$ Уравнение (11) примет вид

$$\frac{(\nu_{\min} - \nu^*)^2}{(\nu_{\min} + \sqrt{\nu^*})(\xi\nu_{\min} + 1)} = \frac{(\nu_{\max} - \nu^*)^2}{(\nu_{\max} + \sqrt{\nu^*})(\xi\nu_{\max} + 1)}. \tag{15}$$

Заменив в уравнении (15) неизвестную ν^* на $1/\nu^*$, значение $\nu_{\min}$ на $1/\nu_{\max}$, а $\nu_{\max}$ на $1/\nu_{\min}$, мы получим уравнение (12). Следовательно, мы можем воспользоваться ранее полученными результатами, найдя приближенно аналитически оптимальный параметр

$$\nu^*_{\text{опт}} \approx \left(\nu^{-1}_{\max} + \delta\right)^{\frac{2}{3}}$$

и оценку нормы итерационного оператора

$$\|\mathbf{S}\|_{\mathbf{K}} \le 1 - 4(\nu^{-1}_{\max} + \delta)^{\frac{1}{3}}.$$

3. Пусть $0 < \nu_{\min} \le 1$, $\nu_{\max} \ge 1$. Тогда требуется решить следующее уравнение:

$$\frac{(\nu_{\min} - \nu^*)^2}{(\nu_{\min} + \sqrt{\nu^*})(\nu_{\min} + \xi)} = \frac{(\nu_{\max} - \nu^*)^2}{(\nu_{\max} + \sqrt{\nu^*})(\xi\nu_{\max} + 1)}. \qquad (16)$$

Преобразовав данное выражение и снова сделав замену $x = \sqrt{\nu^*}$, мы получим уравнение пятой степени. Для того чтобы приближенно оценить его решение, рассмотрим несколько вариантов соотношения величин $\nu_{\min}$ и $\nu_{\max}$.

Можно показать, что если $\nu_{\min} \ll 1, \nu_{\max} \approx 1,$ то мы получим вариант 1, если $\nu_{\min} \approx 1, \nu_{\max} \gg 1,$ то вариант 2. Поэтому в этих двух случаях оптимальные параметры и оценка скорости сходимости известны.

Если $\nu_{\min} \approx 1, \nu_{\max} \approx 1,$ можно использовать приближенную оценку

$$\|\mathbf{S}\|_{\mathbf{K}} \le \frac{\left(\sqrt{\nu_{\max}} - \sqrt{\nu_{\min}}\right)^2}{\left(\sqrt{\nu_{\max}} + \sqrt{\nu_{\min}}\right)^2},$$

полученную ранее в [1]. Данная оценка получается решением минимизационной задачи (5) для функции $S_{\nu^*}(\nu)$ следующего вида:

$$S_{\nu^*}(\nu) = \left(\frac{\nu - \nu^*}{\nu + \nu^*}\right)^2,$$

которая, в свою очередь, получается из функции (6), если не учитывать число блоков в матрице системы ($\delta = 0$) и пренебречь членом $2\sqrt{\nu^*}$ по отношению к единице в знаменателе при $0 < \nu \le 1$ и им же по отношению к ν^* при $\nu \ge 1$.

Если же $\nu_{\min} \ll 1, \nu_{\max} \gg 1,$ то полученное уравнение мы можем решить приближенно аналитически, воспользовавшись правилом параллелограмма Ньютона и оставив в нем главные члены:

$$(\nu_{\max}(1 + \nu_{\max}\xi) - \nu_{\min}(\nu_{\min} + \xi))x^4 + (\nu_{\min}^2(1 + \nu_{\max}\xi) - \nu_{\max}^2(\nu_{\min} + \xi))x \approx 0,$$

откуда

$$x_{\text{опт}} \approx \left(\frac{(\nu_{\min} + \xi)\nu_{\max}}{1 + \nu_{\max}\xi}\right)^{\frac{1}{3}},$$

а оптимальный параметр

$$\nu_{\text{опт}}^{(1)} \approx \left(\frac{\nu_{\min} + \xi}{1/\nu_{\max} + \xi}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Подставляя $\nu^*_{\text{опт}}$ в (9), вынося в знаменателе $(1-\delta)$ и оставляя в числителе и знаменателе главные члены, получим

$$P_{\nu^*_{\text{опт}}}(\nu_{\min}) \approx \frac{1}{4}\nu^*_{\text{опт}} \Big/ \left(\left(1+\sqrt{\nu^*_{\text{опт}}}\right)(\nu_{\min}+\xi)\right).$$

Откуда в силу (9) следует:

$$S_{\nu^*_{\text{опт}}}(\nu_{\min}) \approx \left(1+4\left(\left(\frac{1}{\nu_{\max}}+\xi\right)^{\frac{1}{3}}+(\nu_{\min}+\xi)^{\frac{1}{3}}\right)\left(\left(\frac{1}{\nu_{\max}}+\xi\right)^{\frac{1}{3}}(\nu_{\min}+\xi)^{\frac{1}{3}}\right)\right)^{-1},$$

а оценка нормы итерационного оператора в этом случае примет следующий вид:

$$\|\mathbf{S}\|_{\mathbf{K}} \le 1-4\left(\left(\frac{1}{\nu_{\max}}+\delta\right)^{\frac{1}{3}}+(\nu_{\min}+\delta)^{\frac{1}{3}}\right)\left(\left(\frac{1}{\nu_{\max}}+\delta\right)^{\frac{1}{3}}(\nu_{\min}+\delta)^{\frac{1}{3}}\right).$$

Во всех остальных случаях требуется численное решение уравнения (16).

Рассмотрим пример применения полученных оценок к оценке скорости сходимости касательного разложения для задачи Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате с однородными граничными условиями. Для дискретизации дифференциального уравнения использовался стандартный пятиточечный шаблон.

Для этой задачи собственные значения матрицы $\mathbf{C}$ равны

$$\lambda \approx 1 \Big/ \left(2+4\sin^2\frac{\pi\omega}{2n}\right).$$

Следовательно,

$$\nu_{\min} = \sin^2\frac{\pi h}{2} \Big/ \left(1+\sin^2\frac{\pi h}{2}\right) \approx \frac{\pi^2 h^2}{4} < 1,$$

$$\nu_{\max} = \cos^2\frac{\pi h}{2} \Big/ \left(1+\cos^2\frac{\pi h}{2}\right) < 1$$

$$\text{и } \delta = \sin^2\frac{\pi h}{2} \approx \frac{\pi^2 h^2}{4},$$

откуда в силу (14)

$$\nu^*_{\text{опт}} \approx \left(\frac{\pi^2 h^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Тогда оптимальная частота $\omega^*_{\text{опт}}$, определяемая из соотношения

$$\nu^*_{\text{опт}} = \frac{1-2\lambda^*_{\text{опт}}}{1+2\lambda^*_{\text{опт}}} = 1-1 \Big/ \left(1+\sin^2\frac{\pi\omega^*_{\text{опт}}}{2n}\right), \tag{17}$$

равна

$$\omega^*_{\text{опт}} \approx \sqrt[3]{\frac{4n}{\pi}}, \tag{18}$$

а оценка нормы итерационного оператора

$$\|\mathbf{S}\|_{\mathbf{K}} \le 1-(4\pi)^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{n^2}} \approx 1-O\left(h^{2/3}\right).$$

Многочисленные численные эксперименты показывают, что скорость сходимости порядка $1-O\left(h^{2/3}\right)$ сохраняется как для широкого класса модельных задач, так и для ряда задач с переменными коэффициентами.

В таблице 1 представлены значения оптимального параметра и оценки нормы итерационного оператора касательного разложения, вычисленные с различной степенью точности. Через $h = h_x = h_y$ обозначен шаг картезианской сетки, где $h_x = 1/n$, $h_y = 1/m$. Параметр ω^* получен решением уравнения (8) с учетом соотношения (17). Для сравнения в четвертой строке приведены значения его близкой аппроксимации $\omega^*_{(18)}$ из (18), а также аппроксимации $\omega^*_{\delta=0}$, не учитывающей количество блоков в матрице системы и соответствующие ей значения теоретической оценки нормы итерационного оператора $\eta_{\delta=0}$. В последних двух строках приведены значения скорости сходимости для данной задачи, полученные как теоретически путем подстановки параметра ω^* в (6), так и численно при тех же значениях параметра. Под численной скоростью сходимости понимается средняя за тридцать итераций скорость сходимости. Касательное разложение было построено по определению в соответствии с (3), где параметры из (4), а

$$\lambda^* = \frac{1-2\nu^*}{1+2\nu^*} = 1-1\Big/\left(1+\sin^2\frac{\pi\omega^*}{2n}\right).$$

Таблица 1

H	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
$\omega^*_{\delta=0}$	2,1	2,7	3,5	10	5,5	6,9	8,7
$\eta_{\delta=0}$	0,418	0,555	0,697	0,801	0,871	0,918	0,948
$\omega^*_{(18)}$	2,7	3,4	9	5,5	6,9	8,7	10,9
ω^*	2,6	3,3	8	5,4	6,8	8,6	10,9
$\eta_{\text{теор}}$	0,289	0,476	0,635	0,756	0,841	0,897	0,935
$\eta_{\text{числ}}$	0,289	0,474	0,633	0,755	0,840	0,898	0,936

Как видно из таблицы 1, численная скорость сходимости $\eta_{\text{числ}}$ и теоретическая оценка нормы итерационного оператора $\eta_{\text{теор}}$, вычисленные при одинаковых значениях параметра ω^*, совпадают с высокой степенью точности. Сравнение $\eta_{\text{числ}}$ (или $\eta_{\text{теор}}$) с оценкой, не учитывающей число блоков в матрице системы $\eta_{\delta=0}$, показывает, что чем меньше размер задачи, тем существеннее разница между ними. Для рассмотренной задачи она достигает 20 %.

Результаты численных экспериментов подтверждают теоретический вывод о том, что при выборе оптимальных параметров оценки нормы итерационного оператора для матриц размерности $n\times m$ и $m\times n$ совпадают. Также численные результаты позволяют утверждать, что метод касательного разложения особенно эффективен при небольших значениях n (или m). Значение второй размерности в этом случае может быть сколь угодно большим.

Так как касательное разложение является симметричной итерацией, оно может быть использовано в качестве предобуславливателя в методе сопряженных градиентов. В этом случае порядок скорости сходимости понижается в два раза, что дает для рассмотренной задачи Дирихле для уравнения Пуассона порядок $1-O(h^{1/3})$. Это видно, в частности, из таблицы 2, где приведена численная скорость сходимости касательного разложения, использованного в качестве предобуславливателя в методе сопряженных градиентов и при тех же значениях параметра ω^*, что и в таблице 1.

Таблица 2

h	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
ω^*	2,6	3,3	8	5,4	6,8	8,6	10,9
$\eta_{\text{сг}}$	0,041	0,119	0,206	0,289	0,414	0,532	0,634

Найденные оптимальные значения параметра ω^* можно использовать и для решения задач с переменными коэффициентами для построения тестового вектора $\mathbf{e}^*$. Например, можно взять в качестве

$$\mathbf{e}^* = \left(\sin(\pi\omega^* jh)\right)_{j=1,\dots,n},$$

а параметр ω^* округлить до ближайшего целого.

В таблицах 3 и 4 представлены скорости сходимости касательного разложения, использованного в качестве предобуславливателя в методе сопряженных градиентов для решения задачи Дирихле в единичном квадрате с однородными граничными условиями для уравнения

$$\nabla(\varphi(x,y)\nabla u) = f$$

при различных значениях коэффициента $\varphi(x,y)$.

Значения скорости сходимости в таблице 3 получены для коэффициента

$$\varphi(x,y)=1-\exp(-xy)\,,$$

а в таблице 4 — для уравнения с быстро меняющимися коэффициентами

$$\varphi(x,y)=1+q\sin(14\pi x)\sin(14\pi y),\quad q>0\,.$$

Таблица 3

h	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
ω^*	2	3	4	5	6	7	8
$\eta_{\text{сг}}$	0,127	0,182	0,266	0,362	0,457	0,552	0,639

Таблица 4

H	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
ω^*	2	3	4	5	6	7	8
$\eta_{\text{сг}}\ (q=1)$	0,114	0,117	0,252	0,345	0,442	0,542	0,626
$\eta_{\text{сг}}\ (q=10)$	0,125	0,182	0,266	0,360	0,458	0,550	0,633
$\eta_{\text{сг}}\ (q=100)$	0,130	0,188	0,281	0,396	0,511	0,611	0,687
$\eta_{\text{сг}}\ (q=1000)$	0,130	0,189	0,285	0,409	0,546	0,667	0,756

Полученные численные результаты демонстрируют высокую эффективность метода не только в этих случаях, но и для других задач с переменными коэффициентами при выборе в качестве значений параметра ω^* значений, полученных аналитически для модельной задачи.

Заключение

Исследованы оценки скорости касательного разложения, полученные в [21], и аналитически решена задача нахождения оптимальных значений его параметра. Численные исследования показали, что теоретическая и численная скорость сходимости для широкого класса модельных задач очень близки при условии выбора одинаковых значений параметра разложения.

Доказано теоретически и численно, что метод наиболее эффективен при небольшом размере блоков матрицы системы уравнений (при небольшом количестве блоков матрицы системы). В этих случаях количество блоков (их размер) может быть сколь угодно большим.

Показано, что использование значений параметра, полученных для модельных задач, позволяет достичь высокой скорости сходимости и при решении задач с переменными коэффициентами.

Список литературы

1. *Buzdin A.* Tangential decomposition // Computing. 1998. №61. P. 257—276.

2. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии. 4-е изд. М., 2009.

3. *Макаренков А.М., Серегина Е.В., Степович М.А.* Проекционный метод Галеркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, №5. С. 801—813.

4. *Naegel A., Heisig M., Wittum G.* Detailed modeling of skin penetration. An overview // Advanced Drug Delivery Reviews. 2013. №65 (2). P. 191—207.

5. *Frasch H.F., Barbero A.M.* Application of numerical methods for diffusion-based modeling of skin permeation // Advanced Drug Delivery Reviews. 2013. №65 (2). P. 208—220.

6. *Шушкевич Г.Ч.* Моделирование поля электростатического диполя при наличии тонкой сплюснутой незамкнутой эллипсоидальной оболочки и плоскости // Информатика. 2017. №2 (54). С. 14—23.

7. *Сёмкин Н.Д., Балакин В.Л., Брагин В.В.* Моделирование распределения электромагнитного поля при электростатическом разряде на поверхности космического аппарата // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета). 2012. №2 (33). С. 112—119.

8. *Пименов В.Г., Ложников А.Б.* Разностные схемы решения уравнения теплопроводности с последействием // Труды института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, №1. С. 179—189.

9. *Алексеев Г.В., Левин В.А., Терешко Д.А.* Оптимизационный анализ задачи тепловой маскировки цилиндрического тела // Доклады Академии наук. 2017. Т. 472, №4. С. 398—402.

10. *Hackbusch W.* Multi-Grid Methods and Applications. Springer, 1985.

11. *Ильин И.В.* Параллельные методы и технологии декомпозиции областей // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер.: Вычислительная математика и информатика. 2012. №46 (305). С. 31—44.

12. *Hackbusch W.* Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations. Springer, 2016.

13. *Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н. и др.* Алгебраический многосеточный метод в задачах вычислительной физики // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15, №2. С. 183—200.

14. *Волков К.Н., Козелков А.С., Лашкин С.В. и др.* Параллельная реализация алгебраического многосеточного метода для решения задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, №12. С. 2079—2097.

15. *Wittum G.* Filternde Zerlegungen. Schnelle Löser für grosse Gleichungssysteme // Teubner Skripten zur Numerik. Bd 1. Stuttgart, 1992.

16. *Ильин В.П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М., 1995.

17. *Buzdin A., Wittum G.* Two-Frequency Decomposition // Numer. Math. 2004. №97. P. 269—295.

18. *Wagner C.* Frequenzfilternde Zerlegungen für unsymmetrische Matrizen und Matrizen mit stark variierenden Koeffizienten // ICA-Preprint 95/7. Stuttgart, 1995.

19. *Wagner C.* Tangential frequency filtering decompositions for symmetric matrices // Numer. Math. 1997. №78. P. 119—142.

20. *Wagner C.* Frequency filtering decompositions for unsymmetric matrices // Numer. Math. 1997. №78. P. 143—163.

21. *Буздин А.А., Васильева Е.А.* Уточненная оценка нормы итерационного оператора касательного разложения // Известия КГТУ. 2015. №36. С. 186—193.

22. *Erlichson, H.* Newton's Polygon Model and the Second Order Fallacy // Centaurus. 2007. №35. P. 243—258.

Об авторе

Екатерина Алексеевна Васильева — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: EVasileva@kantiana.ru

E.A. Vasilyeva

OPTIMAL PARAMETERS AND SHARP ESTIMATES OF THE CONVERGENCE RATE OF THE TANGENT EXPANSION

Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia
Received 06 June 2022
Accepted 22 June 2022

To cite this article: Vasilyeva E.A. 2022, Optimal parameters and sharp estimates of the convergence rate of the tangent expansion, *Vestnik of Immanuel Kant Baltic Federal University. Series: Physical-mathematical and technical sciences,* №1. P. 77—89.

In this paper we conceder the properties of the tangential incomplete block LU — decomposition. We present an analytical approach for determination of the optimal values of the decomposition parameter and derive sharp estimates of the convergence rate for a broad class of model problems. Numerical results prove that high convergence rate can be achieved by using these values also for the problems with varying coefficients.

Keywords: incomplete block decomposition, tangential decomposition, preconditioner, matrices

The author

Dr Ekaterina A. Vasilyeva, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: EVasileva@kantiana.ru