УДК 574.76

В. С. Малаховский[1]
[1] Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
nikolaymal@mail.ru

Подмножества простых чисел, получаемые с помощью обобщенной арифметической прогрессии

Дана краткая историческая справка о формулах и многочленах, порождающих подмножества простых чисел. Рассмотрены примеры подмножеств простых чисел, получаемых использованием обобщенной арифметической прогрессии.

Доказано, что простые числа множеств M_λ являются первыми $(\lambda + 1)/2$ членами обобщенной арифметической прогрессии с первым членом $(\lambda + 3)/2$ и знаменателем $d = 2$.

Ключевые слова: простое число, многочлен, подмножество, обобщенная арифметическая прогрессия.

На протяжении многих веков большой интерес у многих математиков вызывали множество простых чисел и получение его подмножеств. Жан Фурье (1768—1830) вывел формулу

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \tag{1}$$

дающую, как он думал, при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ простые числа. Однако, Л. Эйлер (1707—1783) доказал, что число F_5 составное:

$$F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417 \tag{2}$$

Поступила в редакцию 22.03.2018 г.

Он также обнаружил несколько многочленов, дающих подряд до указанного предела простые числа, то есть определяющие подмножества простых чисел. Например,

$$2x^2 + 29\ (x = \overline{0,28}),\ \ x^2 + x + 41\left(x = \overline{0,39}\right)\ , \qquad (3)$$

$$x^2 - 79x + 1601\ \left(x = \overline{0,79}\right).$$

К. Ф. Гаусс (1777—1855) доказал, что вписанный в окружность правильный многоугольник с нечетным числом сторон может быть построен с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда число сторон является числом F_n $(n = \overline{0,4})$ или произведением попарно различных чисел Ферма. Этим результатом он подтвердил выдающуюся роль Ферма в получении формулы (1).

А. Дирихле доказал, что на множестве N натуральных чисел линейная функция

$$f_{m,\,p}(x) = mx + p \quad (m \in N, p \in P),\quad x \in N_0 \qquad (4)$$

дает бесчисленное множество простых чисел (здесь P — множество простых чисел). Существует бесчисленное множество арифметических прогрессий, дающих подряд три простых числа, однако есть только одна такая прогрессия

$$f_{6,\,5}(x) = 6x + 5, \qquad (5)$$

дающая пять простых чисел:

$$f_{6,\,5}(0) = 5,\ f_{6,\,5}(1) = 11,\ f_{6,\,5}(2) = 17,\ f_{6,\,5}(3) = 23,\ f_{6,\,5}(4) = 29. \quad (6)$$

Найдены две арифметические прогрессии, дающие по четыре подряд простые числа: $f_{6,\,251}(x)$ и $f_{6,\,1741}(x)$. Они определяют подмножества

$$\{251, 257, 263, 269\},\ \ \{1741, 1747, 1753, 1759\}. \qquad (7)$$

Для получения подряд возникающих простых чисел можно использовать не только линейные функции, но и многочлены с различными степенями n = 2, 3, 4 и т. д. Например, рассмотрим кубичные многочлены

$$300x^3+11\left(x=\overline{0,9}\right),\ 1800x^3+79\left(x=\overline{0,3}\right),$$
$$x^3-x+7\left(x=\overline{0,5}\right),\ x^3-7x+103\left(x=-\overline{5,7}\right),\tag{8}$$
$$x^3-7x+373\left(x=-\overline{5,6}\right),x^3-7x+353\left(x=-\overline{7,5}\right),$$
$$x^3-13x+29\left(x=-\overline{4,7}\right),\ x^3-37x+163\left(x=-\overline{2,0}\right),$$
$$x^3-19x+211\left(x=-\overline{6,9}\right),\ \ x^3-43x+149\left(x=-\overline{7,10}\right),$$
$$x^3-x+37\left(x=-\overline{3,5}\right),x^3-73x+251\left(x=\overline{0,8}\right),$$
$$x^3-7x+23\left(x=-\overline{3,8}\right),\ x^3-x+23\left(x=-\overline{2,4}\right)$$

(см.: [1, с. 74—75]). Квадратные трехчлены даны в [3, с. 42—43]. Можно использовать также трансцендентные функции [3, с. 43].

Особую роль в нахождении подмножеств простых чисел играют рекуррентные последовательности, среди которых выделяется обобщенная арифметическая прогрессия [2, с. 95]:

$$a_{n+1}=a_n+nd,\tag{9}$$

где $d\in N$ — разность.

Обозначим символом $A_{a_1,d}$ обобщенную арифметическую прогрессию с первым членом a_1 и знаменателем d, а $a_k\in N$ — ее члены.

Не используя компьютер, убеждаемся, что при $a_1\in\{11, 17, 41\}$ и $d=2$ прогрессия (9) определяет следующие подмножества:

$A_{11,.2}$:{11, 13, 17, 23, 31, 41, 53, 67, 83, 101},
$A_{17,2}$:{17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127,
149, 173, 199, 227, 157},
$A_{41,2}$:{41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, (10)
173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461,
503,547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971,
1033, 1097,1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601},

содержащие соответственно десять, шестнадцать и сорок простых чисел.

Обобщенные арифметические прогрессии $A_{19,4}$, $A_{23,6}$, $A_{653,8}$, $A_{13,10}$, $A_{17,12}$ определяют следующие подмножества простых чисел:

$A_{19,4}$:{19, 23, 31, 43, 59, 79, 103, 131, 163, 199, 239, 283, 331, 383, 439, 499, 563, 631}, (11)

$A_{23,6}$: {23, 29, 41, 59, 83, 113, 149, 191, 239, 293, 353, 419, 491, 569, 653, 743, 839, 941, 1049, 1163, 1283, 1409},

$A_{653,8}$: {653, 661, 677, 701, 733, 773, 821, 877, 941, 1013, 1093, 1181, 1277, 1381, 1493, 1613, 1741, 1877},

$A_{13,10}$: {13, 23, 43, 73, 113, 163, 223, 293, 373, 463, 563, 673},

$\mathrm{A}_{17,12}$: {17, 29, 53, 89, 137, 197, 269, 353, 449, 557, 677, 809, 953, 1109, 1277}.

Используя компьютерные программы, можно получать подмножества простых чисел в обобщенных арифметических прогрессиях с большими первыми членами и большими разностями. Обратимся к некоторым определяемым такими обобщенными арифметическими прогрессиями подмножествам:

$\mathrm{A}_{47,50}$: {47, 97, 197, 347, 547, 797, 1097, 1447, 1847, 2297, 2797, 3347, 3947, 4597, 6047},

$\mathrm{A}_{67391,36}$: {67391, 67427, 67499, 67607, 67751, 67931, 68147, 68399, 68687, 69011, 69371, 69767, 70199, 70667, 71711, 72287},

$\mathrm{A}_{19219,54}$:{19219, 19273, 19381, 19543, 19759, 20029, 20353, 20731, 21163, 21649, 22189, 22783, 23431, 24133, 24889},

$\mathrm{A}_{53117,54}$: {53117, 53171, 53279, 53441, 53657, 53927, 54251, 54629, 55061, 55547, 56087, 56681, 57329, 58031, 58787}, (12)

$\mathrm{A}_{1777,84}$: {1777, 1861, 2029, 2281, 2617, 3037, 3541, 4129, 4801, 5557, 6397, 7331, 8329, 9421, 10597},

$\mathrm{A}_{19249,84}$: {19249, 19333, 19501, 19753, 20089, 20509, 21013, 21601, 22273, 23029, 23869, 24793, 25801,26893, 28069},

$\mathrm{A}_{1381,106}$: {1381, 1487, 1699, 2017, 2441, 2971, 3607, 4349, 5197, 6151, 7211, 8377, 9649, 11027, 12511}.

В [4] рассмотрены пять совокупностей квадратных трехчленов:

$$f_{a_\lambda}(x) \equiv x^2 - a_\lambda x + \frac{1}{4}(a_\lambda^2 + 2\lambda + 5), \tag{13}$$

где

$$\lambda \in \Lambda = \{3, 7, 19, 31, 79\}, \tag{14}$$

$$a_\lambda \in A_\lambda = \{1, 3, 5, ..., \lambda\}. \tag{15}$$

Доказано, что каждый из многочленов (10) при $x_0 = 0, ..., \frac{1}{2}(\lambda + a_\lambda)$ и фиксированной $\lambda \in \Lambda$ определяет множество M_λ:

$$\begin{aligned}
&M_3 = \{3, 5\};\ M_7=\{5, 7, 11, 17\};\\
&M_{19} = \{11, 13, 17, 23, 31, 41, 53, 67, 83, 101\};\\
&M_{31} = \{17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127,\\
&\qquad 149, 173, 199, 227, 257\}; \qquad (16)\\
&M_{79} = \{41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173,\\
&\qquad 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547,\\
&\qquad 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097,\\
&\qquad 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601\}.
\end{aligned}$$

Теорема. *Простые числа множества M_λ являются первыми $\frac{1}{2}(\lambda+1)$ членами обобщенной арифметической прогрессии (9) с первым членом $\frac{1}{2}(\lambda+3)$ и знаменателем d = 2.*

Доказательство. Для $\lambda = 79$ теорема доказана в [2]. Проведем доказательство для остальных $\lambda \in \Lambda$.

1) $M_3 : \frac{1}{2}(3+3) = 3;$

$$\frac{1}{2}(3+1) = 2 \to b_1 = 3, b_2 = 3 + 1 \cdot 2 = 5 \to \{3,\ 5\},$$

2) $M_7 : \frac{1}{2}(7+3) = 5;$

$$\frac{1}{2}(7+1) = 4 \to b_1 = 5, b_2 = 5 + 1 \cdot 2 = 7, b_3 = 7 + 2 \cdot 2 = 11,$$
$$b_4 = 11 + 3 \cdot 2 = 17 \to \{5, 7, 11, 17\};$$

3) $M_{19} : \frac{1}{2}(19+3) = 11;$

$$\frac{1}{2}(19+1) = 10 \to b_1 = 11, b_2 = 11 + 1 \cdot 2 = 13, b_3 = 13 + 2 \cdot 2 = 17,$$
$$b_4 = 17 + 3 \cdot 2 = 23, b_5 = 23 + 4 \cdot 2 = 31, b_6 = 31 + 5 \cdot 2 = 41,$$
$$b_7 = 41 + 6 \cdot 2 = 53, b_8 = 53 + 7 \cdot 2 = 67, b_9 = 67 + 8 \cdot 2 = 83,$$
$$b_{10} = 83 + 9 \cdot 2 = 101 \to \{11, 13, 17, 23, 31, 41, 53, 67, 83, 101\};$$

4) $M_{31} : \frac{1}{2}(31+3) = 17;$

$$\frac{1}{2}(31+1) = 16 \to b_1 = 17, b_2 = 17 + 1 \cdot 2 = 19, b_3 = 19 + 2 \cdot 2 = 23,$$
$$b_4 = 23 + 3 \cdot 2 = 29, b_5 = 29 + 4 \cdot 2 = 37, b_6 = 37 + 5 \cdot 2 = 71,$$
$$b_7 = 47 + 6 \cdot 2 = 93, b_8 = 93 + 7 \cdot 2 = 73, b_9 = 73 + 8 \cdot 2 = 89,$$
$$b_{10} = 89 + 9 \cdot 2 = 107, b_{11} = 107 + 10 \cdot 2 = 127,$$
$$b_{12} = 127 + 11 \cdot 2 = 149, b_{13} = 149 + 12 \cdot 2 = 173,$$
$$b_{14} = 173 + 13 \cdot 2 = 199, b_{15} = 199 + 14 \cdot 2 = 227,$$
$$b_{16} = 227 + 15 \cdot 2 = 257 \to \left\{\begin{matrix} 17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, \\ 107, 127, 149, 173, 199, 227, 257 \end{matrix}\right\}.$$

В [3] были рассмотрены две пятерки квадратных трехчленов

$$f_\lambda(x) \equiv x^2 - x + \frac{1}{2}(\lambda + 3),$$
$$\varphi_\lambda(x) \equiv x^2 + x + \frac{1}{2}(\lambda + 3) \tag{17}$$

и доказано, что при $x_0 = 0, ..., \frac{1}{2}(\lambda + 1)$, $x_0 = 0, ..., \frac{1}{2}(\lambda - 1)$ соответственно эти многочлены определяют при каждом фиксированном λ одно и тоже множество M_λ простых чисел. Так как

$$\varphi_\lambda(x) \equiv f_\lambda(x) + 2x,$$

то, взяв $x_0 \in 0, ..., \frac{1}{2}(\lambda - 1)$ и подсчитав $p_1 = f_\lambda(x_0) \in M_\lambda$, находим

$$\varphi_\lambda(x_0) = p + 2x_0 = p_2 \in M_\lambda.$$

Например, при $\lambda = 79$, $x_0 = 27$ получим

$$f_{79}(27) = 27^2 - 27 + 41 = 743 \in M_{79};$$

$$f_{79}(27) = 743 + 2 \cdot 27 = 797 \in M_{79}.$$

Список литературы

1. *Малаховский В. С.* Числа знакомые и незнакомые. Калининград, 2004.

2. *Малаховский В. С.* Удивительные свойства некоторых подмножеств простых чисел и их особая роль во множестве натуральных чисел // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 89—97.

3. *Малаховский В. С.* Эти загадочные простые числа. Часть вторая. Приложение к книге «Введение в математику». Калининград, 1999.

4. *Малаховский В. С.* Необычные свойства некоторых совокупностей квадратичных трехчленов // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2018. №1. С. 25—29.

V. Malakhovsky[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo ul., Kaliningrad, 236016, Russia
nikolaymal@mail.ru

Subsets of prime numbers received by means of generalized arithmetic progression

Submitted on March 22, 2018

A short historical information about formulas and polynomials generating subsets of prime numbers is given. Examples of subsets of prime numbers by using generalized arithmetic progression are obtained.

It is proved that prime numbers of the sets M_λ are the first $(\lambda + 1)/2$ members of the generalized arithmetic progression with first member $(\lambda + 3)/2$ and denominator $d = 2$.

Keywords: prime number, polynomial, subset, generalized arithmetic progression.

References

1. *Malakhovsky, V. S.:* Numbers familiar and unfamiliar. Kaliningrad (2004) (in Russian).

2. *Malakhovsky, V. S.:* Wonderful properties of some subsets of prime numbers and their special role in the set N of natural numbers. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 47, 89—97 (2016) (in Russian)

3. *Malakhovsky, V. S.:* These mysterious prime numbers, II. Kaliningrad (1999) (in Russian).

4. *Malakhovsky, V. S.:* Unusual properties of some sets of square trinomials. IKBFU's Vestnik. Ser. Physics, Mathematics, and technology. Kaliningrad. 1, 25—29 (2018) (in Russian).