С учетом соотношений (9) система уравнений (II) примет вид:

$$\omega_i^\beta = \Lambda_{ij}^\beta \omega^j + \Lambda_{i\gamma}^\beta \omega^\gamma, \qquad (I2)$$

где $\Lambda_{ij}^\beta = g^{\alpha\beta} g_{i\ell} h_{\alpha j}^\ell$, $\quad \Lambda_{i\gamma}^\beta = g^{\alpha\beta} g_{i\ell} h_{\alpha\gamma}^\ell$.

Система (I2) представляет собой дифференциальные уравнения распределения $\mathrm{Ker}\, f_*^\perp$ элементов $\Delta^\perp(x)$, ортогональных слоям отображения f. Будем называть $\mathrm{Ker}\, f_*^\perp$ горизонтальным распределением, а векторы, лежащие в площадках, $\Delta^\perp(x)$-горизонтальными. Уравнения (I2) показывают, что горизонтальное распределение в общем случае неголономно.

4. Пусть $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ -конформное отображение пониженного ранга τ. В согласованных реперах условие конформности имеет вид:

$$\overline{g}_{ij} = \varphi g_{ij}, \qquad \varphi = \varphi(x). \qquad (I3)$$

Конформное отображение f пониженного ранга сохраняет меру угла между двумя любыми горизонтальными векторами; изометрическое отображение f пониженного ранга (при $\varphi = 1$) будет сохранять также длину всякого горизонтального вектора. Эти факты непосредственно следуют из соответствующих определений [3, с.49,52].

Распределение Δ на многообразии (M,g) называется вполне геодезическим [5, с.I50], если его вторая фундаментальная форма обращается в нуль. Вторая фундаментальная форма омбилического распределения Δ [5, с.I5I] пропорциональна его метрической форме. Наконец, распределение Δ называется минимальным [5, с.I5I], если свертка его второй фундаментальной формы с компонентами метрического тензора дает нуль. Исходя из системы уравнений (I2) заключаем, что вторая фундаментальная форма θ горизонтального распределения $\mathrm{Ker}\, f_*^\perp$ действует по закону

$$\theta(\vec{X},\vec{Y}) = \Lambda_{(ij)}^\alpha X^i Y^j \vec{e}_\alpha \qquad (I4)$$

для произвольных горизонтальных векторов $\vec{X} = X^i \vec{e}_i$ и $\vec{Y} = Y^j \vec{e}_j$. Пользуясь условиями (I2), соотношениями (I3) и (I4), можно доказать, что справедливы

Т е о р е м а 1. Если $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ -конформное отображение пониженного ранга, то горизонтальное распределение $\mathrm{Ker}\, f_*^\perp$ является омбилическим.

С л е д с т в и е. Если $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ -гомотетическое отображение пониженного ранга, то горизонтальное распределение $\mathrm{Ker}\, f_*^\perp$ является вполне геодезическим.

5. Пусть $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ -эквиобъемное отображение пониженного ранга τ. Условие эквиобъемности в согласованных реперах принимает вид:

$$\det \|\overline{g}_{ij}\| = \det \|g_{ij}\|, \qquad (I5)$$

откуда следует, что эквиобъемное отображение пониженного ранга сохраняет элемент объема горизонтальной площадки, натянутой на векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_\tau$. Исходя из условия (I5), с помощью соотношений (I2) и (I4) доказывается

Т е о р е м а 2. Если $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ -эквиобъемное отображение пониженного ранга, то горизонтальное распределение $\mathrm{Ker}\, f_*^\perp$ является минимальным.

Библиографический список

I. Л а п т е в Г.Ф. Инвариантная аналитическая теория дифференцируемых отображений//Тр.Междунар.конгр.математиков.Ницца,I970.С.84-85.

2. Н а р а с и м х а н Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях.М.:Мир,I97I.

3. Э й з е н х а р т Л.П. Риманова геометрия.М.:ИЛ,I948.

4. Yano K., Ishihara S. Harmonic and relatively affine mappings // J. Dif. Geom. 1975. V.10. N4. P. 501-509.

5. Reinhart B.L. Differential geometry of foliations. Springer-Verlag. 1983.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ЛИНЕЙЧАТОЙ КВАДРИКОЙ И ПРЯМОЙ

Е.В.С к р ы д л о в а

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются вырожденные конгруэнции [I], образованные линейчатой квадрикой Q и прямой ℓ, в которых квадрика Q описывает однопараметрическое семейство, а прямая ℓ -прямолинейную конгруэнцию. Такие конгруэнции названы конгруэнциями $(Q\ell)_{1,2}$. Изучен класс конгруэнций $(Q\ell)_{1,2}$, характеризующийся двусторонним расслоением конгруэнции (ℓ) и ассоциированной с ней прямолинейной конгруэнции (ℓ').

Трехмерное проективное пространство P_3 отнесем к подвижному реперу $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, в котором вершины A_0 и A_3 являются точками пересечения прямой ℓ с соответствующей ей линейчатой квадрикой Q, а вершины A_1 и A_2 совпадают с точками пересечения прямолинейных образующих квадрики Q, проходящих через A_0 и A_3. Прямую A_1A_2 назовем ℓ'. Относительно построенного репера квадрику Q и прямую ℓ можно задать соответственно уравнениями

$$x^0x^3 - x^1x^2 = 0, \qquad (I)$$

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0. \tag{2}$$

Так как семейство квадрик Q является однопараметрическим, а прямых ℓ – двупараметрическим (конгруэнцией), то

$$\operatorname{rang}\{\omega_0^3,\ \omega_1^3-\omega_0^2,\ \omega_2^3-\omega_0^1,\ \omega_1^1+\omega_2^2-\omega_0^0-\omega_3^3,\ \omega_1^2,\ \omega_2^1,\ \omega_3^2-\omega_1^0,\ \omega_3^1-\omega_2^0,\ \omega_3^0\}=1, \tag{3}$$

$$\operatorname{rang}\{\omega_0^1,\ \omega_0^2,\ \omega_3^1,\ \omega_3^2\}=2. \tag{4}$$

В соответствии с условиями (3),(4) будем считать, что $\omega_0^1\wedge\omega_0^2\neq0$, $\omega_3^0\neq0$, т.е. формы $\omega_0^i \overset{def}{=} \omega^i$ $(i,j,k=1,2)$ выберем в качестве базисных форм конгруэнции $(Q\ell)_{1,2}$.

Рассмотрим класс конгруэнций $(Q\ell)_{1,2}$, в котором пара прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ') является двусторонне расслояемой. Такие конгруэнции будем называть конгруэнциями L. Условия двустороннего расслоения конгруэнций (ℓ) и (ℓ') имеют вид:

$$\begin{cases} \omega_3^k\wedge\omega_k^0=0, \quad \omega_0^k\wedge\omega_k^0-\omega_3^k\wedge\omega_k^3=0, \quad \omega_0^k\wedge\omega_k^3=0, \\ \omega_i^0\wedge\omega_0^j+\omega_i^3\wedge\omega_3^j=0, \quad \omega_1^0\wedge\omega_0^1+\omega_1^3\wedge\omega_3^1-\omega_2^0\wedge\omega_0^2-\omega_2^3\wedge\omega_3^2=0. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и суммирование по индексам i,j не производится. Разрешая условия (5) с учетом равенств (3),(4), получим при некоторой нормировке вершин репера R систему уравнений Пфаффа конгруэнций L:

$$\omega_i^3=\omega^j, \quad \omega_i^0=\omega_3^j, \tag{6}$$

$$\begin{cases} \omega_3^i=\alpha_i\omega^j, \quad \omega_0^3=\Gamma_0^3\,\omega_3^0, \quad \omega_i^j=\Gamma_i^j\,\omega_3^0, \quad \omega_3^0=\lambda\,(\omega^1-\omega^2), \\ \omega_1^1+\omega_2^2-\omega_0^0-\omega_3^3=\Gamma\,\omega_3^0, \quad \omega_1^1-\omega_2^2=a_k\,\omega^k \end{cases} \tag{7}$$

Замыкание уравнений (6) приводит к конечным соотношениям

$$\Gamma(\alpha_1-\alpha_2)=0, \quad \alpha_1\alpha_2\,\Gamma_0^3=1, \quad \Gamma_i^j=\alpha_j\,\Gamma_0^3-\tfrac{1}{2}\Gamma. \tag{8}$$

Из равенств (8) следует, что конгруэнции L распадаются на два класса: конгруэнции L_1, для которых $\Gamma=0$, и конгруэнции L_2, для которых $\Gamma\neq0$.

Продолжая уравнения (7) при условии $\Gamma=0$ и нормируя вершины репера R так, что $\alpha_1\alpha_2=1$, получим систему уравнений Пфаффа конгруэнций L_1:

$$\begin{cases} \omega_i^3=\omega^j, \quad \omega_i^0=\omega_3^j, \quad \omega_0^3=\omega_3^0, \quad \omega_i^j=\alpha_j\,\omega_3^0, \\ \omega_3^i=\alpha_i\,\omega^j, \quad \omega_3^0=\lambda\,(\omega^1-\omega^2), \quad \omega_1^1+\omega_2^2=\omega_0^0=\omega_3^3=0, \\ \omega_1^1-\omega_2^2=a_k\,\omega^k, \quad d\alpha+\alpha\,(\omega_1^1-\omega_2^2)=0 \quad (\alpha_1\overset{def}{=}\alpha,\ \alpha_2=\tfrac{1}{\alpha}). \end{cases} \tag{9}$$

Конгруэнции L_1 существуют и определяются с произволом одной функ-

ции двух аргументов. Продолжение уравнений (7) при условии $\Gamma\neq0$ и таком нормировании вершин репера R, что $\alpha_1=1$, позволяет получить систему уравнений Пфаффа конгруэнций L_2:

$$\begin{cases} \omega_i^3=\omega^j, \quad \omega_i^0=\omega^i, \quad \omega_3^i=\omega^j, \quad \omega_i^j=p\,\omega_3^0, \\ \omega_0^3=\omega_3^0, \quad \omega_3^0=\lambda\,(\omega^1-\omega^2), \quad \omega_1^1-\omega_2^2=0, \quad \omega_3^3-\omega_0^0=0, \\ \omega_1^1+\omega_2^2-\omega_0^0-\omega_3^3=2\,\omega_3^0-\omega_1^2-\omega_2^1. \end{cases} \tag{10}$$

Конгруэнции L_2 существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.

Для конгруэнций L_1 и L_2 получены следующие результаты.

Т е о р е м а 1. Пары прямолинейных конгруэнций (A_0A_1) и (A_2A_3), а также (A_0A_2) и (A_1A_3), ассоциированные с конгруэнциями L_1, являются двусторонне расслояемыми. Для конгруэнций L_2 указанные расслоения имеют место лишь в подклассе, выделяемом условием $p=0$.

Т е о р е м а 2. Фокальные точки всех шести ребер репера R, описывающих прямолинейные конгруэнции, ассоциированные с конгруэнциями L_1 и L_2, гармонически разделяют соответствующие вершины репера R. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_0A_1) и (A_2A_3), а также (A_0A_2) и (A_1A_3), попарно соответствуют. В конгруэнциях L_2 имеет место также соответствие торсов конгруэнций (ℓ) и (ℓ').

Т е о р е м а 3. Фокальные поверхности прямолинейных конгруэнций, описанных всеми шестью ребрами репера R, ассоциированных с конгруэнциями L_1, вырождаются в прямые линии, причем прямолинейные конгруэнции, описанные попарно скрещивающимися ребрами, имеют общие фокальные прямые. В конгруэнциях L_2 указанным свойством обладают лишь прямолинейные конгруэнции (ℓ) и (ℓ').

Введем следующие обозначения. Пусть $F^{(1)}_{\alpha\beta}$ и $F^{(2)}_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta=0,1,2,3;$ $\alpha<\beta$, $\gamma<\delta$) – фокусы ребра $A_\alpha A_\beta$ репера R, описывающего прямолинейную конгруэнцию $(A_\alpha A_\beta)$; $\ell^{(1)}_{\alpha\beta}$ и $\ell^{(2)}_{\alpha\beta}$ – прямые, описанные фокусами $F^{(1)}_{\alpha\beta}$ и $F^{(2)}_{\alpha\beta}$ соответственно. Тогда в силу теоремы 3 прямая $\ell^{(2)}_{\alpha\beta}$ совпадает с прямой $\ell^{(1)}_{\gamma\delta}$, если среди чисел $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ нет равных. Рассмотрим конику $C^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, являющуюся линией пересечения квадрики Q с плоскостью $A_\alpha A_\beta F^{(1)}_{\gamma\delta}$ ($\alpha<\beta$, $\gamma<\delta$, числа $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ образуют перестановку). Таким образом, получим двенадцать коник, каждая из которых описывает двупараметрическое семейство (конгруэнцию).

Т е о р е м а 4. Каждая коника $C^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, описывающая конгруэнцию, ассоциированную с конгруэнцией L_1, имеет два трехкратных фокуса, которые совпадают с точками пересечения этой коники с прямой $\ell^{(1)}_{\gamma\delta}$. При этом трехкратные фокусы каждой из коник $C^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ гармонически разделяют фокусы $F^{(1)}_{\alpha\beta}$ и $F^{(1)}_{\gamma\delta}$. В конгруэнциях L_2 аналогичным свойством обладают лишь четыре коники $C^{(1)}_{1203}$ и $C^{(1)}_{0312}$.

Библиографический список

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1973.Вып.3.С.41-49.

УДК 514.75

СВЯЗНОСТЬ В МНОГООБРАЗИИ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ, ИНДУЦИРОВАННОМ ГИПЕРКОНГРУЭНЦИЕЙ

В.П.Папенко

(Калининградское ВИУИВ)

Рассмотрено $(n-1)$-параметрическое невырожденное многообразие (гиперконгруэнция K_{n-1}) пар фигур (P,Q), состоящих из невырожденной гиперквадрики Q и неинцидентной ей точки P n-мерного проективного пространства P_n. При этом точка P описывает гиперповерхность S_{n-1}, а гиперквадрика Q – $(n-1)$-параметрическое многообразие.

Отнесем многообразие K_{n-1} к реперу $R=\{A_0,A_i\}$ ($i,j,\dots=\overline{1,n}$), у которого вершины A_i помещены в гиперплоскость L_{n-1}, полярно-сопряженную точке P относительно гиперквадрики Q. Уравнение гиперквадрики Q и система уравнений Пфаффа гиперконгруэнции K_{n-1} записывается в виде $a_{ij}x^i x^j+2a_{0i}x^0x^i+(x^0)^2=0$ ($a_{ij}=a_{ji}$),

$$\Delta a_{i'j'} = a_{i'j'\alpha}\Delta x^\alpha, \qquad \Delta x^n = b_\alpha \Delta x^\alpha, \qquad \omega^0_i = \Lambda_{i\alpha}\Delta x^\alpha, \tag{1}$$

где $i',j',\dots=\overline{0,n}$; $\alpha,\beta,\dots=\overline{1,n-1}$ и $\Delta a_{i'j'}$, Δx^i являются структурными формами соответственно пространства гиперквадрик Q и точечного проективного пространства P_n [1]. Базисные формы Δx^α удовлетворяют уравнениям

$$d\Delta x^\alpha = \Delta x^\beta \wedge \theta^\alpha_\beta, \tag{2}$$

где $\theta^\alpha_\beta=\omega^\alpha_\beta-\delta^\alpha_\beta(\omega^0_0+x^k\omega^0_k)-x^\alpha\omega^0_\beta+b_\beta(\omega^\alpha_n-x^\alpha\omega^0_n)$, а вторичные формы ω^i_0, ω^i_j, ω^0_0 – уравнениям

$$\begin{cases} d\omega^i_0 = \omega^j_0\wedge(\omega^i_j-\delta^i_j\omega^0_0), \\ d\omega^i_j = \omega^k_j\wedge\omega^i_k+\Delta x^\alpha\wedge(\Lambda_{j\alpha}\omega^i_0), \\ d\omega^0_0 = \Delta x^\alpha\wedge(-\Lambda_{k\alpha}\omega^k_0). \end{cases} \tag{3}$$

Из уравнений (2),(3) заключаем, что с гиперконгруэнцией K_{n-1} ассоциируется главное расслоение $G_\tau(S_{n-1})$, для которого базой является гиперповерхность S_{n-1}, а типовым слоем – подгруппа стационарности G_τ ($\tau=n^2+n$) гиперплоскости L_{n-1}. Это расслоение является сужением расслоения $G_\tau(P_n)$[1] на базу S_{n-1}, поэтому естественно ожидать сохранение многих результатов.

В главном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ зададим фундаментально-групповую связность по Г.Ф.Лаптеву, используя для этого формы

$$\tilde\omega^i_0 = \omega^i_0-\Gamma^i_\alpha\Delta x^\alpha, \qquad \tilde\omega^i_j=\omega^i_j-\Gamma^i_{j\alpha}\Delta x^\alpha, \qquad \tilde\omega^0_0=\omega^0_0-\Gamma_\alpha\Delta x^\alpha,$$

где $\Gamma=\{\Gamma^i_\alpha,\Gamma^i_{j\alpha},\Gamma_\alpha\}$ – набор некоторых функций. Внешние дифференциалы форм $\tilde\omega^i_0$, $\tilde\omega^i$, $\tilde\omega^0_0$ удовлетворяют уравнениям

$$d\tilde\omega^i_0=\tilde\omega^0_0\wedge\tilde\omega^i_0+\tilde\omega^j_0\wedge\tilde\omega^i_j+\Delta x^\alpha\wedge(\nabla\Gamma^i_\alpha-\Gamma^i_\beta b_\alpha\omega^\beta_n+\Gamma_\alpha\omega^i_0-\Gamma^i_{j\alpha}\omega^j_0)+$$
$$+(\Gamma^i_\gamma x^\gamma\Lambda_{\alpha\beta}+b_\alpha\Lambda_{n\beta}\Gamma^i_\gamma x^\gamma-\Gamma_\alpha\Gamma^i_\beta-\Gamma^j_\alpha\Gamma^i_{j\beta}-x^k\Lambda_{k\alpha}\Gamma^i_\beta)\Delta x^\alpha\wedge\Delta x^\beta,$$

$$d\tilde\omega^i_j=\tilde\omega^k_j\wedge\tilde\omega^i_k+\Delta x^\alpha\wedge(\nabla\Gamma^i_{j\alpha}-\Gamma^i_{j\beta}b_\alpha\omega^\beta_n+\Lambda_{j\alpha}\omega^i_0)+[\Gamma^i_{j\gamma}x^\gamma(\Lambda_{\alpha\beta}+b_\alpha\Lambda_{n\beta})-$$
$$-\Gamma^k_{j\alpha}\Gamma^i_{k\beta}-\Gamma^i_{j\beta}x^k\Lambda_{k\alpha}]\Delta x^\alpha\wedge\Delta x^\beta,$$

$$d\tilde\omega^0_0=\Delta x^\alpha\wedge(\nabla\Gamma_\alpha-\Gamma_\beta b_\alpha\omega^\beta_n-\Lambda_{k\alpha}\omega^k_0)+[\Gamma_\alpha x^k\Lambda_{k\beta}+$$
$$+\Gamma_\gamma x^\gamma(\Lambda_{\alpha\beta}+b_\alpha\Lambda_{n\beta})]\Delta x^\alpha\wedge\Delta x^\beta.$$

Отсюда в силу теоремы Картана-Лаптева связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ задается полем объекта связности Γ на базе S_{n-1}, компоненты которого должны удовлетворять уравнениям

$$\nabla\Gamma^i_\alpha-\Gamma^i_\beta b_\alpha\omega^\beta_n+\Gamma_\alpha\omega^i_0-\Gamma^i_{j\alpha}\omega^j_0=\Gamma^i_{\alpha\beta}\Delta x^\beta,$$
$$\nabla\Gamma^i_{j\alpha}-\Gamma^i_{j\beta}b_\alpha\omega^\beta_n+\Lambda_{j\alpha}\omega^i_0=\Gamma^i_{j\alpha\beta}\Delta x^\beta,$$
$$\nabla\Gamma_\alpha-\Gamma_\beta b_\alpha\omega^\beta_n-\Lambda_{k\alpha}\omega^k_0=\Gamma_{\alpha\beta}\Delta x^\beta.$$

Теорема 1. Присоединение к каждой паре фигур (P,Q) точки B, не принадлежащей гиперплоскости L_{n-1}, позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$.

Следствие. Связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ возникает естественным образом, если в качестве оснащающей точки B взять точку P.

Теорема 2. Точка B переносится параллельно в связности Γ тогда и только тогда, когда она неподвижна.

Теорема 3. Подобъект линейной связности $\Gamma^i_{j\alpha}$ объекта связности Γ характеризуется проекцией на гиперплоскость L_{n-1} смежной с ней гиперплоскости $L_{n-1}+dL_{n-1}$ из центра B.

Таким образом, изменение размерности многообразия пар фигур (P,Q) не повлияло на свойства фундаментально-групповой связности ассоциированного расслоения, типовым слоем которого является подгруппа стационарности гиперплоскости L_{n-1}.