гообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1976. Вып.7. С.54-60.

2. Шмелева С.В. Об одном классе конгруэнций линейчатых квадрик с трехкратной фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1992. Вып.23. С.118-123.

УДК 514.75

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОМПЛЕКСЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ КВАДРИКОЙ И ТОЧКОЙ, ИНЦИДЕНТНОЙ КВАДРИКЕ

Т.П.Фунтикова

(Калинингадский государственный университет)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются вырожденные комплексы $(QP^*)_{3,1}$, порожденные квадрикой Q и точкой P^* [1]. Многообразие квадрик Q – трехмерное, а точек P^* – одномерное. Изучен класс вырожденных комплексов $(QP^*)_{3,1}$, для которых касательные к линиям (P^*) и Γ_{P^*} параллельны в соответствующих точках.

Отнесем комплекс $(QP^*)_{3,1}$ к реперу $R=\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, в котором точка A совмещена с центром P квадрики Q, вектор $\vec{e}_2$ направлен по касательной к линии Γ_{P^*} в точке P, а вектор $\vec{e}_1$ – по касательной к асимптотической линии поверхности (P), конец вектора $\vec{e}_3$ (точка A_3) совмещен с точкой P^*, концы векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (точки A_1, A_2) инцидентны квадрике Q. Квадрика Q в репере R задается уравнением

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-2\alpha x^1x^2-2\gamma x^2x^3-2\beta x^1x^3-1=0. \qquad (1)$$

Учитывая, что многообразие квадрик Q – трехмерное, а точек P^* – одномерное, выберем $\omega^1, \omega^2, \omega_2^2$ в качестве базисных форм комплекса, обозначив их соответственно $\theta^1, \theta^2, \theta^3$. Система уравнений Пфаффа комплекса $(QP^*)_{3,1}$ имеет вид:

$$\begin{cases} \omega^3=0,\ \omega_3^3=0,\ \omega_3^1=-\theta^1,\ \omega_3^2=\Gamma_{31}^2\theta^1-\theta^2,\ \omega_2^1=\Gamma_{21}^1\theta^1,\ \omega_i^3=C\theta^j, \\ \omega_1^2=\Gamma_{1i}^2\theta^i,\ \omega_1^1=\Gamma_{1a}^1\theta^a,\ d\alpha=\alpha_a\theta^a,\ d\beta=\beta_a\theta^a,\ d\gamma=\gamma_a\theta^a, \\ d\ln C=(\Gamma_{ii}-2\Gamma_{ij}^j)\theta^i+(\Gamma_{13}^1+1)\theta^3\ \ (\Gamma_{31}^2\neq 0,\ i,j=1,2;\ i\neq j;\ a=1,2,3). \end{cases} \qquad (2)$$

Вырожденные комплексы $(QP^*)_{3,1}$ существуют и определяются с произволом четырех функций трех аргументов.

Получены следующие результаты: 1) линии Γ_{P^*} на поверхности (P), соответствующие точкам P^*, являются прямыми, а поверхность (P) – линейчатой; 2) прямолинейные конгруэнции (AA_1), (AA_3) – параболические, точки P, P^* являются соответственно сдвоенными фокальными точками их лучей, торсы высекают на поверхности (P) сеть асимптотических линий, прямолинейная конгруэнция (AA_2) – цилиндрическая; 3) существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (AA_3) к семейству плоскостей $(A,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$; 4) аффинные нормали к поверхности (P) параллельны соприкасающейся плоскости линии (P^*) в соответствующих точках; 5) линия (P^*) является прямой тогда и только тогда, когда существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (AA_1) к семейству плоскостей $(A,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, поверхность (P) в этом случае является плоскостью; 6) линия (P^*) является плоской тогда и только тогда, когда существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (AA_1) к семейству соприкасающихся плоскостей линии (P^*); 7) если характеристика плоскости $(A,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ совпадает с касательной к линии (P^*) в соответствующей точке P^*, то прямая Γ_{P^*} и аффинная нормаль к поверхности (P) в точке P принадлежат соприкасающейся плоскости линии (P^*) в точке P^*; 8) в силу поставленной задачи точка P^* является фокальной точкой комплекса квадрик Q и конгруэнции квадрик Q_{P^*}, соответствующих точке P^*.

Каждой точке P^* линии (P^*) соответствуют конгруэнции коник (C_a), полученных при пересечении квадрики Q координатными плоскостями $x^a=0$. Коники имеют следующие уравнения:

$$C_1:\quad (x^2)^2+(x^3)^2-2\beta x^2x^3-1=0,\quad x^1=0, \qquad (3)$$

$$C_2:\quad (x^1)^2+(x^3)^2-2\gamma x^1x^3-1=0,\quad x^2=0, \qquad (4)$$

$$C_3:\quad (x^1)^2+(x^2)^2-2\alpha x^1x^2-1=0,\quad x^3=0. \qquad (5)$$

Конгруэнции (C_a) определяются системой уравнений (2) и условием $\theta^1=0$.

Теорема. Конгруэнции (C_a) обладают свойствами:

1) все коники C_1 инцидентны одной плоскости, имеют одну общую точку P^* и центры их находятся на неподвижной прямой (AA_2);
2) фокальными точками коники C_2 являются точки P^*, $\vec{F}_1=\vec{A}-\vec{e}_3$, а также точки пересечения коники C_2 с характеристикой $x^3-\Gamma^2_{12}x^1-1=0$ плоскости $x^2=0$ и прямой

$$(\gamma\Gamma^1_{13}-\gamma_3)x^3-\Gamma^1_{13}x^1=0,\quad x^2=0;$$

3) сдвоенными фокальными точками коники C_3 являются точки A_2, $\vec{F}_2=\vec{A}-\vec{e}_2$, две фокальные точки инцидентны прямой

$$(1-\Gamma^1_{13})x^1+(\alpha\Gamma^1_{13}-\alpha-\alpha_3)x^2=0,\quad x^3=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Справедливость утверждения следует из того, что в силу уравнений (2) и условия $\theta^1=0$:

$$dx^1=0,\quad d\vec{A}=\theta^2\vec{e}_2,\quad d\vec{e}_2=\theta^3\vec{e}_2;\quad d\vec{P}^*=d(\vec{A}+\vec{e}_3)=0,$$

т.е. плоскость $x^1=0$, прямая (AA_2) и точка P^* неподвижны.
2) Координаты фокальных точек коники C_2 находятся из уравнений (4) и уравнения

$$x^1(x^3-\Gamma^2_{12}x^1-1)(x^3(\gamma\Gamma^1_{13}-\gamma_3)-\Gamma^1_{13}x^1)=0.$$

Решая их, убеждаемся в справедливости данного утверждения.
3) Координаты фокальных точек коники C_3 получаем, решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^1(\Gamma^1_{13}(x^1)^2+(x^2)^2-x^1x^2(\alpha-\alpha\Gamma^1_{13}-\alpha_3))=0,\\ (x^1)^2+(x^2)^2-2\alpha x^1x^2-1=0,\quad x^3=0. \end{cases}\tag{6}$$

Если $x^1=0$, то получаем $x^2=\pm1$. Если же $\Gamma^1_{13}(x^1)^2+(x^2)^2+x^1x^2(\alpha_3+\alpha(1-\Gamma^1_{13}))=0$, то вычитая из этого уравнения второе уравнение системы (6), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} (x^1)^2+(x^2)^2-2\alpha x^1x^2-1=0,\quad x^3=0,\\ ((\Gamma^1_{13}-1)x^1-x^2(\alpha\Gamma^1_{13}-\alpha-\alpha_3))\cdot x^1=0. \end{cases}\tag{7}$$

Решая систему уравнений (7), находим еще четыре фокальные точки коники C_3. Теорема доказана.

Рассмотрим квадрику

$$\Phi=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-1=0,\tag{8}$$

ассоциированную с образующими элементами комплекса $(QP^*)_{3,1}$. Характеристическое многообразие комплекса квадрик Φ определяется системой уравнений

$$\Gamma^1_{11}(x^1)^2+(\Gamma^1_{21}+\Gamma^2_{11})x^1x^2-x^1x^3+(\Gamma^2_{31}+C)x^2x^3+x^1=0,\tag{9}$$

$$\Gamma^1_{12}(x^1)^2+\Gamma^2_{12}x^1x^2+Cx^1x^3-x^2x^3+x^2=0,\tag{10}$$

$$\Gamma^1_{13}(x^1)^2+(x^2)^2=0.\tag{11}$$

Если $\Gamma^1_{13}>0$, то из уравнения (11) следует $x^1=0$, $x^2=0$, и тогда характеристическое многообразие комплекса квадрик Φ инцидентно прямой (AA_3). Решая систему уравнений (9) - (11) совместно с уравнением (8), получаем две сдвоенные фокальные точки P^*, F_1 квадрики Φ. Если $\Gamma^1_{13}<0$, то характеристическое многообразие комплекса квадрик Φ инцидентно двум плоскостям $x^2=\pm\sqrt{-\Gamma^1_{13}}\,x^1$ и состоит из прямой (AA_3) и двух точек.

Конгруэнция Φ_{P^*} квадрик Φ, соответствующих точке P^*, определяется системой уравнений (2) и условием $\theta^1=0$. Характеристическое многообразие конгруэнции Φ_{P^*} задается системой уравнений (10), (11) и в случае $\Gamma^1_{13}<0$ состоит из трех прямых (AA_3), m, n, где прямые m, n задаются системами уравнений

$$\begin{cases} x^1(\Gamma^1_{12}\pm\Gamma^1_{12}\sqrt{-\Gamma^1_{13}})\mp x^3(\sqrt{-\Gamma^1_{13}}-c)\pm\sqrt{-\Gamma^1_{13}}=0,\\ x^2=\pm\sqrt{-\Gamma^1_{13}}\,x^1. \end{cases}$$

Фокальное многообразие квадрики Φ конгруэнции Φ_{P^*} в этом случае состоит из сдвоенных фокальных точек P^*, F_1 и четырех точек пересечения прямых m, n с квадрикой Φ.

Библиографический список

1. Ф у н т и к о в а Т.П. Об одном классе вырожденных комплексов, порожденных квадрикой и точкой // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1992. Вып.23. С.105-107.

УДК 514.75

О КОНГРУЭНЦИЯХ ПАР ФИГУР, ПОРОЖДЕННЫХ КОНИКОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ В A_3

Е.А.Щ е р б а к

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются кон-