УДК 514.76

Ю. И. Шевченко [1], ***А. В. Вялова*** [2]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
[2] *Калининградский государственный технический университет, Россия*
[1] ESkrydlova@kantiana.ru, [2] vyalova.alexa@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-14

Метрики пространства с линейной связностью, не являющейся полусимметрической

Хорошо известно построение Леви-Чивиты объекта аффинной связности (в современной терминологии — линейной связности) по полю невырожденной метрики на гладком многообразии. Обратная задача (построение метрики по заданной линейной связности) решается неоднозначно, причем метрика может оказаться вырожденной и неопределенной. С одной стороны, две отличающиеся знаком метрики строятся очевидно — путем сворачивания тензора кривизны с последующим симметрированием. С другой стороны, метрика Врэнчану представляет собой двойную свертку произведений компонент тензора кручения. В настоящей статье обратная задача Леви-Чивиты решена иначе с помощью поля объекта связности.

Доказано, что в общем случае, когда линейная связность не является полусимметрической, можно построить шесть метрик. В особом случае, когда линейная связность полусимметрична (в частности, без кручения), построенные метрики обращаются в нуль.

Исследование проведено на полуголономном гладком многообразии с помощью двух продолжений его структурных уравнений. Использован способ Лаптева — Лумисте задания связности в главном расслоении и обобщения объекта классической проективной связности.

Ключевые слова: метрика, линейная (аффинная) связность, классическая проективная связность, тензоры кручения и кривизны

Поступила в редакцию 08.05.2022 г.

1. Расслоение кореперов 2-го порядка. Структурные уравнения n-мерного гладкого многообразия V_n имеют вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j \ \ (i,... = \overline{1,n}). \qquad (1)$$

Дифференцируем их внешним образом и разрешаем результат по лемме Лаптева [1, с. 141]:

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \qquad (2)$$

причем новые формы ω^i_{jk} удовлетворяют условиям полуголономности [2]:

$$\omega^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \ \Leftrightarrow \ \omega^i_{[jk]} = \lambda^i_{jkl}\omega^l, \ \ \lambda^i_{(jk)l} = 0, \ \ \lambda^i_{\{jkl\}} = 0, \qquad (3)$$

где λ^i_{jkl} — некоторые функции, квадратные скобки обозначают альтернирование, круглые скобки — симметрирование, а фигурные скобки — циклирование.

Продолжение структурных уравнений (2) приводится к виду

$$d\omega^i_{jk} = \omega^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \omega^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \omega^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \omega^l \wedge \omega^i_{jkl}, \qquad (4)$$

$$\omega^i_{jkl} \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0 \ \Leftrightarrow \ \omega^i_{j[kl]} = \lambda^i_{jklm}\omega^m, \ \ \lambda^i_{j(kl)m} = 0, \ \ \lambda^i_{j\{klm\}} = 0. \qquad (5)$$

Точка многообразия V_n фиксируется вполне интегрируемой системой уравнений $\omega^i = 0$, тогда уравнения (2, 4) становятся проще:

$$d\pi^i_j = \pi^k_j \wedge \pi^i_k \ \ (\pi = \omega\big|_{\omega^i=0}),$$

$$d\pi^i_{jk} = \pi^l_{jk} \wedge \pi^i_l - \pi^i_{lk} \wedge \pi^l_j - \pi^i_{jl} \wedge \pi^l_k .$$

Это структурные уравнения линейной группы 2-го порядка L^2, $\dim L^2 = \frac{1}{2}n^2(n+3)$, имеющей линейную фактор-группу

$L^1 = GL(n)$, $\dim L^1 = n^2$. Эти группы действуют в касательных пространствах 1-го и 2-го порядков T^1 и T^2 к многообразию V_n в фиксированной точке, причем

$$\dim T^1 = n,\ \dim T^2 = \frac{1}{2}n(n+3).$$

Утверждение 1. Над гладким многообразием V_n имеется главное расслоение кореперов 2-го порядка $L^2(V_n)$ со структурными уравнениями (1, 2, 4), базой которого служит многообразие V_n с уравнениями (1) и типовым слоем — линейной группой 2-го порядка $L^2 > L^1$, где символ > обозначает наличие факторгруппы L^1 в группе L^2.

2. Линейная связность. Зададим линейную [3] связность (в классической терминологии — аффинную связность [4]) в главном расслоении линейных кореперов $L^1(V_n)$ способом Лаптева — Лумисте [5; 6] с помощью форм

$$\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \omega^k, \tag{6}$$

где Γ_{jk}^i — некоторые функции. Внешние дифференциалы этих форм найдем с помощью структурных уравнений (1, 2):

$$d\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge (d\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{jl}^i \omega_k^l + \omega_{jk}^i). \tag{7}$$

Преобразуем внешние произведения слоевых форм:

$$\omega_j^k \wedge \omega_k^i = \tilde{\omega}_j^k \wedge \tilde{\omega}_k^i + \Gamma_{jl}^k \omega^l \wedge \omega_k^i + \omega_j^k \wedge \Gamma_{km}^i \omega^m - \Gamma_{jl}^k \omega^l \wedge \Gamma_{km}^i \omega^m.$$

Подставим эти выражения в уравнения (7):

$$d\tilde{\omega}_j^i = \tilde{\omega}_j^k \wedge \tilde{\omega}_k^i + \omega^k \wedge (\Delta\Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i) - \Gamma_{jk}^m \omega^k \wedge \Gamma_{ml}^i \omega^l, \tag{8}$$

где дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^l_{jk}\omega^i_l - \Gamma^i_{lk}\omega^l_j - \Gamma^i_{jl}\omega^l_k .$$

Согласно теореме Картана — Лаптева [6, с. 83] зададим поле объекта линейной (в классической терминологии — аффинной) связности

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l . \tag{9}$$

Подставим дифференциальные уравнения (9) в структурные уравнения (8):

$$d\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l , \tag{10}$$

где компоненты объекта кривизны линейной связности выражаются по формуле

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]}, \tag{11}$$

причем альтернирование здесь и в дальнейшем выполняется по крайним индексам в квадратных скобках.

Внесем формы связности (6) в структурные уравнения (1) многообразия V_n:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + T^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k , \tag{12}$$

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}, \tag{13}$$

где T^i_{jk} — объект кручения линейной связности.

Утверждение 2. *Линейная связность в расслоении линейных кореперов $L^1(V_n)$ задается формами (6), определенными с помощью компонент объекта линейной связности Γ^i_{jk}, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям (9). Формы линейной связности (6) входят в структурные уравнения*

(10, 12), содержащие объекты кручения T^i_{jk} *(13) и кривизны* R^i_{jkl} *(11), причем последний выражается не только через объект связности* Γ^i_{jk}*, но и через его пфаффовы производные* Γ^i_{jkl}.

3. Тензорность объектов кручения и кривизны. В дифференциальных уравнениях (9) раскроем действие дифференциального оператора Δ и проальтернируем результат:

$$d\Gamma^i_{[jk]} + \Gamma^l_{[jk]}\omega^i_l - \Gamma^i_{l[k}\omega^l_{j]} - \Gamma^i_{[jl}\omega^l_{k]} + \omega^i_{[jk]} = \Gamma^i_{[jk]l}\omega^l. \qquad (14)$$

Раскроем альтернирование в двух слагаемых и используем выражение кручения (13):

$$-\Gamma^i_{l[k}\omega^l_{j]} - \Gamma^i_{[jl}\omega^l_{k]} = -T^i_{lk}\omega^l_j - T^i_{jl}\omega^l_k.$$

Уравнения (14) примут вид

$$\Delta T^i_{jk} + \omega^i_{[jk]} = \Gamma^i_{[jk]l}\omega^l.$$

Для полуголономного [2] многообразия V_n имеем

$$\Delta T^i_{jk} = T^i_{jkl}\omega^l, \quad T^i_{jkl} = \Gamma^i_{[jk]l} - \lambda^i_{jkl}. \qquad (15)$$

В особом случае голономного [2] многообразия $\overset{0}{V}_n$ дифференциальные уравнения (15_1) сохраняют вид, но

$$\lambda^i_{jkl} = 0, \quad T^i_{jkl} = \Gamma^i_{[jk]l}.$$

Утверждение 3. *На полуголономном многообразии* V_n *объект кручения* T^i_{jk} *является тензором, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (*15_1*).*

Следствие 1. На голономном многообразии $\overset{0}{V}_n$ пфаффовы производные T^i_{jkl} тензора кручения T^i_{jk} выражаются проще.

Определение 1. Если тензор кручения равен нулю: $T^i_{jk} = 0 \Leftrightarrow \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, то линейная связность без кручения называется также *симметрической*.

Запишем дифференцированные уравнения (9) подробно и продифференцируем их внешним образом с помощью структурных уравнений (1, 2, 4):

$$(\Delta\Gamma^i_{jkl} + \Gamma^m_{jk}\omega^i_{ml} - \Gamma^i_{mk}\omega^m_{jl} - \Gamma^i_{jm}\omega^m_{kl} + \omega^i_{jkl}) \wedge \omega^l = 0.$$

Разрешим эти квадратичные уравнения по лемме Картана и запишем результат в виде дифференциальных сравнений:

$$\Delta\Gamma^i_{jkl} + \Gamma^m_{jk}\omega^i_{ml} - \Gamma^i_{mk}\omega^m_{jl} - \Gamma^i_{jm}\omega^m_{kl} + \omega^i_{jkl} \equiv 0 \ \ (\mathrm{mod}\,\omega^m).$$

Проальтернируем эти сравнения по индексам k, l, затем учтем выражения (3_2, 5_2):

$$\Delta\Gamma^i_{j[kl]} + \Gamma^m_{j[k}\omega^i_{ml]} - \Gamma^i_{m[k}\omega^m_{jl]} \equiv 0\ . \qquad (16)$$

С помощью дифференциальных уравнений (9) получим

$$\Delta\Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]} + \Gamma^i_{m[l}\omega^m_{jk]} + \Gamma^m_{j[k}\omega^i_{ml]} \equiv 0\ . \qquad (17)$$

Согласно формуле (11) вычтем из сравнений (16) сравнения (17), тогда

$$\Delta R^i_{jkl} \equiv 0 \ \ (\mathrm{mod}\,\omega^m). \qquad (18)$$

Утверждение 4. *На полуголономном многообразии V_n объект кривизны R^i_{jkl} является тензором с дифференциальными сравнениями (18) для его компонент.*

Следствие 2. На голономном многообразии $\overset{0}{V}_n$ сравнения (18) для компонент тензора кривизны R^i_{jkl} не изменяются.

4. Классы аффинных и проективных связностей. Рассмотрим разные свертки объекта несимметрической линейной связности

$$\overset{1}{\Gamma}_j = \Gamma^i_{ji}, \quad \overset{2}{\Gamma}_k = \Gamma^i_{ik}, \tag{19}$$

которые удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\Delta \overset{1}{\Gamma}_j + \overset{1}{\omega}_j = \overset{1}{\Gamma}_{jl}\, \omega^l, \quad \Delta \overset{2}{\Gamma}_k + \overset{2}{\omega}_k = \overset{2}{\Gamma}_{kl}\, \omega^l;$$

$$\overset{1}{\omega}_j = \omega^i_{ji}, \quad \overset{1}{\Gamma}_{jl} = \Gamma^i_{jil}, \quad \overset{2}{\omega}_k = \omega^i_{ik}, \quad \overset{2}{\Gamma}_{kl} = \Gamma^i_{ikl}.$$

Определение 2. В зависимости от вида компонент объекта линейной связности Γ^i_{jk} и их сверток $\overset{a}{\Gamma}_i$ (19) используем следующие названия:

1) $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ — *симметрическая* (иначе говоря, без кручения) линейная связность;

2) $\overset{1}{\Gamma}_i = \overset{2}{\Gamma}_i$ — *полусимметрическая* (ср. [4]) линейная связность;

3) $\Gamma^i_{jk} \neq \Gamma^i_{kj}$, $\overset{1}{\Gamma}_i = \overset{2}{\Gamma}_i$ — *существенно полусимметрическая* линейная связность;

4) $\Gamma^i_{jk} \neq \Gamma^i_{kj}$, $\overset{1}{\Gamma}_i \neq \overset{2}{\Gamma}_i$ — *общая* линейная связность.

Утверждение 5. *Линейные связности разбиваются на три класса: симметрические, существенно полусимметрические и общие связности.*

Введем два аналога объекта классической проективной связности:

$$\overset{a}{\Pi}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j \overset{a}{\Gamma}_k + \delta^i_k \overset{a}{\Gamma}_j) \quad (a = 1, 2). \tag{20}$$

Это непосредственное обобщение формулы для объекта классической проективной связности, построенной с помощью объекта симметрической аффинной связности. Библиография по истории понятия проективной связности приведена в работе [6]. Формула (20) дает

Утверждение 6. *Если* $\overset{1}{\Gamma}_i = \overset{2}{\Gamma}_i$, *то получается единственное обобщение объекта классической проективной связности, т. к.* $\overset{1}{\Pi}{}^i_{jk} = \overset{2}{\Pi}{}^i_{jk}$, *если* $\overset{1}{\Gamma}_i \neq \overset{2}{\Gamma}_i$, *то имеем два обобщения с объектами* $\overset{a}{\Pi}{}^i_{jk}$.

Из формулы (20) следуют четыре формулы:

$$\overset{1}{\Pi}{}^i_{ji} = 0, \quad \overset{2}{\Pi}{}^i_{ji} = \overset{1}{\Gamma}_j - \overset{2}{\Gamma}_j, \quad \overset{1}{\Pi}{}^i_{ik} = \overset{2}{\Gamma}_k - \overset{1}{\Gamma}_k, \quad \overset{2}{\Pi}{}^i_{ik} = 0. \qquad (21)$$

Первое и последнее равенства показывают непосредственные обобщения объекта классической проективной связности. Второе и третье выражения суть разности двух сверток объекта линейной связности, которые образуют тензоры в силу равенств (3_2). Это обеспечивает инвариантность их обращения в нуль, то есть возможность равенств $\overset{1}{\Gamma}_i = \overset{2}{\Gamma}_i$.

Вывод 1. *Общая линейная связность* $(\Gamma^i_{jk} \neq \Gamma^i_{kj}, \quad \overset{1}{\Gamma}_i \neq \overset{2}{\Gamma}_i)$ *порождает две проективные связности с объектами* $\overset{a}{\Pi}{}^i_{jk}$. *Если линейная связность полусимметрическая* $(\overset{1}{\Gamma}_i = \overset{2}{\Gamma}_i)$, *в частности симметрическая* $(\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj})$, *то объекты порожденных проективных связностей совпадают:* $\overset{1}{\Pi}{}^i_{jk} = \overset{2}{\Pi}{}^i_{jk}$. *Иначе говоря, классическая аффинная связность и полусимметрическая линейная связность индуцируют единственные проективные связности.*

5. Метрики, порожденные общей линейной связностью. Объект общей аффинной связности и две его свертки позволяют построить объекты

$$\overset{ab}{\Pi}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j \overset{a}{\Gamma}_k + \delta^i_k \overset{b}{\Gamma}_j) \quad (a,b=1,2), \tag{22}$$

обобщающие объекты (20), которые получаются при $a=b$. Рассмотрим два объекта $\overset{ab}{\Pi}$ $(a \neq b)$, которые назовем объектами обобщенных проективных связностей.

Компоненты объекта $\overset{12}{\Pi}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta \overset{12}{\Pi}{}^i_{jk} + \omega^i_{jk} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j \overset{1}{\omega}_k + \delta^i_k \overset{2}{\omega}_j) \equiv 0.$$

Свернем их двумя способами. Обозначим $\overset{12}{\Pi}_j = \overset{12}{\Pi}{}^i_{ji}$, тогда

$$\Delta \overset{12}{\Pi}_j + \frac{n}{n+1}(\overset{1}{\omega}_j - \overset{2}{\omega}_j) \equiv 0.$$

При другом сворачивании $\overset{12}{\pi}_k = \overset{12}{\Pi}{}^i_{ik}$ имеем

$$\Delta \overset{12}{\pi}_k + \frac{n}{n+1}(\overset{2}{\omega}_k - \overset{1}{\omega}_k) \equiv 0.$$

Аналогично получаем

$$\Delta \overset{21}{\Pi}{}^i_{jk} + \omega^i_{jk} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j \overset{2}{\omega}_k + \delta^i_k \overset{1}{\omega}_j) \equiv 0.$$

При $i=k$ величины $\overset{21}{\Pi}_j = \overset{21}{\Pi}{}^i_{ji}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta \overset{21}{\Pi}_j + \frac{1}{n+1}(\overset{1}{\omega}_j - \overset{2}{\omega}_j) \equiv 0.$$

При $i=j$ имеем $\overset{21}{\pi}_k = \overset{21}{\Pi}{}^{i}_{ik}$, причем

$$\Delta \overset{21}{\pi}_k + \frac{1}{n+1}(\overset{2}{\omega}_k - \overset{1}{\omega}_k) \equiv 0.$$

Следующие линейные комбинации компонент всевозможных пар из четырех квазитензоров $\overset{12}{\Pi}_i, \overset{12}{\pi}_i, \overset{21}{\Pi}_i, \overset{21}{\pi}_i$, являющихся свертками аналогов объектов двух несимметричных линейных связностей, образуют шесть одновалентных тензоров:

$$\overset{1}{G}_i = \overset{12}{\Pi}_i + \overset{12}{\pi}_i, \quad \overset{2}{G}_i = \overset{12}{\Pi}_i - n\overset{21}{\Pi}_i, \quad \overset{3}{G}_i = \overset{12}{\Pi}_i + n\overset{21}{\pi}_i,$$

$$\overset{4}{G}_i = \overset{12}{\pi}_i + n\overset{21}{\Pi}_i, \quad \overset{5}{G}_i = \overset{12}{\pi}_i - n\overset{21}{\pi}_i, \quad \overset{6}{G}_i = \overset{21}{\Pi}_i + \overset{21}{\pi}_i.$$

Каждая из шести совокупностей удовлетворяет дифференциальным уравнениям следующего вида:

$$\Delta G_i = G_{ij}\omega^j.$$

Замыкая их, найдем

$$(\Delta G_{ij} - G_k \omega^k_{ij}) \wedge \omega^j = 0.$$

Разрешая эти квадратичные уравнения по лемме Картана, получим дифференциальные сравнения

$$\Delta G_{ij} - G_k \omega^k_{ij} \equiv 0.$$

Введем величины

$$\hat{G}_{ij} = G_{ij} + G_k \Gamma^k_{ij},$$

которые удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta \hat{G}_{ij} \equiv 0,$$

поэтому образуют тензор, который не является симметрическим. Наконец, в результате симметрирования получим метрику

$$g_{ij} = \hat{G}_{(ij)}, \quad \Delta g_{ij} \equiv 0.$$

Теорема. *Поле объекта общей линейной связности порождает шесть метрических тензоров.*

Замечание. Метрики g_{ij} могут быть неопределенными и вырожденными.

Пусть линейная связность полусимметрична, то есть $\overset{1}{\Gamma}_i = \overset{2}{\Gamma}_i$. Тогда обобщение (22) формулы (20) невозможно, так как два объекта $\overset{12}{\Pi}$, $\overset{21}{\Pi}$ вырождаются в один объект $\overset{1}{\Pi} = \overset{2}{\Pi}$. Но из объектов $\overset{12}{\Pi}$, $\overset{21}{\Pi}$ построены тензоры G_i, продолжения которых привели к метрикам g_{ij}. Значит, в случае полусимметрической линейной связности нельзя построить метрики. Тем более это нельзя сделать для симметрической линейной связности.

Утверждение 7. *В пространстве полусимметрической (в частности, симметрической) линейной связности метрика не существует.*

Вывод 2. *Обратная задача Леви-Чивиты, то есть построение метрического тензора по заданной линейной связности, решена следующим образом: 1) в общем случае, когда связность не является полусимметрической, существует шесть метрик; 2) в особом случае, когда связность полусимметрическая (в частности, симметрическая), решения не существует.*

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1966. Т. 1. С. 139—189.

2. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

3. *Номидзу К.* Группы Ли и дифференциальная геометрия. М., 1960.

4. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. 2-е изд., испр. М., 1976.

5. *Лаптев Г.Ф.* Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. 4-го Всесоюз. матем. съезда, 1961. Т. 2. Л., 1964. С. 226—233.

6. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

7. *Veblen O.* Generalized projective geometry // J. Lond. Math. Soc. 1929. Vol. 4. P. 140—160.

MSC 2010: 53B05, 53B10, 53B20

Yu. I. Shevchenko[1], *A. V. Vyalova*[2]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
[2] *Kaliningrad State Technical University*
1 Sovietsky Prosp., Kaliningrad, 236022, Russia
[1] ESkrydlova@kantiana.ru, [2] vyalova.alexa@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-53-14

Metrics of a space with linear connection which is not semi-symmetric

Submitted on May 08, 2022

It is well-known Levi-Chivita's construction of object for affine connection (in modern terminology — linear connection) by the field of non-degenerate metric on a smooth manifold. An inverse problem (a construction of metric by given linear connection) is solved ambiguously, besides, the metric may turn out to be degenerate and indefinite. On the one hand, two metrics differing in a sign are obviously build: by curvature tensor contractionwith subsequent symmetrization. On the other hand, Vranceanu's metric is a double contraction of multiplication of a torsion tensor's components. In this paper Levi-Chivita's inverse problem is solved in other way using the field of connection object.

It is proved that in the general case, when the linear connection is not semi-symmetric, six metrics can be constructed. In the special case, when the linear connection is semi-symmetric (in particular, torsion-free), the constructed metrics vanish.

The investigation is done on a semi-holonomic smooth manifold by means of two prolongation its structure equations.

Keywords: metric, linear (affine) connection, classic projective connection, torsion and curvature tensors

References

1. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem., 1, 139—189 (1966).

2. *Shevchenko, Yu. I.:* The equipment of holonomic and nonholonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998).

3. *Nomizu, K.:* Lie Groups and Differential Geometry. Moscow (1960).

4. *Norden, A.P.:* Spaces with an affine connection. Moscow (1976).

5. *Laptev, G.F.:* Manifolds, imbedded in generalized spaces. Tr. 4th All-Union Math. Congr., 1961. Leningrad, 2 (1964). P. 226—233.

6. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

7. *Veblen, O.:* Generalized projective geometry. J. Lond. Math. Soc., 4, 140—160 (1929).