L. Isaeva

CENTERPROJECTIVE AND LINEAR CONNECTIONS, INDUCED BY NORMALIZATION OF PROJECTIVE SPACE

The example of a projective group reduced in the article by Vedernikov is reviewed, dedicated to distribution of a method of normalization by Norden on a case of a bundle space [1]. The projective group is shown by us as bundle of centerprojective reference marks. A method by Laptev is rotined, that the normalization of projective space induces centerprojective connection in this bundle. It is demonstrated, that the adoptation of a mobile reference mark of projective space to a field of normalizing hyperplanes narrows down bundle of centerprojective reference marks up to bundle of linear reference marks with connection

УДК 514.76

В.И. Макеев
(Пензенский государственный педагогический университет)

ОБ АЛГЕБРАХ ЛИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ИЗОМЕТРИЙ ПРОСТРАНСТВ $g_{3,y}$ ОПРЕДЕЛЕННЫХ КЛАССОВ

Изучаются инфинитезимальные относительные изометрии веса *w* трехмерных общих метрических пространств $g_{3,y}$ векторных элементов с относительной метрикой. Получены алгебры Ли $L_r, r \geq 5$ инфинитезимальных относительных изометрий пространств $g_{3,y}$ и сами эти пространства, допускающие разрешимые пятимерные группы относительных изометрий определенных структур.

Пусть M – гладкое n-мерное многообразие и $T(M)$ – его касательное расслоение. Под общим метрическим пространством $g_{n,y}$ векторных элементов с относительной метрикой понимается пара $(M, g(x,y))$, где $y \in T_x(M)$, а $g(x,y)$ – невырожденное симметрическое M-тензорное [1] поле типа (0,2), компоненты которого по определению относительны весу w и однородны фиксированной степени k по слоевым координатам. Относительной изометрией (веса w) будем называть, следуя работе [2], дифференцируемое преобразование в M, естественное продолжение которого в $T(M)$ сохраняет метрику $g(x,y)$. Инфинитезимальная относительная изометрия X на M характеризуется равенством нулю производной Ли от $g_{n,y}$ вдоль полного лифта ${}^{c}X$. В локальных координатах $\left(x^{\sigma}, y^{\sigma}\right)$ это означает, что

$$\xi^{\sigma}\partial_{\sigma}g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta\cdot\sigma}\partial_{\lambda}\xi^{\sigma}y^{\lambda} + g_{\sigma\beta}\partial_{\alpha}\xi^{\sigma} + g_{\alpha\sigma}\partial_{\beta}\xi^{\sigma} + wg_{\alpha\beta}\partial_{\sigma}\xi^{\sigma} = 0, \quad (1)$$

где $X = \xi^{\sigma}(x)\partial/\partial x^{\sigma}$, $\partial_{\sigma} = \partial/\partial x^{\sigma}$, $g_{\alpha\beta}$- компоненты $g(x,y)$, $g_{\alpha\beta\cdot\sigma} = \partial g_{\alpha\beta}/\partial y^{\sigma}$; $\alpha,\beta,\ldots = 1,\ldots,n$. При этом

$$g_{\alpha\beta\cdot\sigma}y^{\sigma} = kg_{\alpha\beta}. \quad (2)$$

Задачу получения алгебр Ли $L_r, r \geq 5$ инфинитезимальных относительных изометрий решаем для трехмерных пространств $g_{3,y}$, в предположении, что последние допускают разрешимые транзитивные группы относительных изометрий G_5 размерности пять. В случае $r = 5$ исходим из классификации [3] структур вещественных алгебр Ли $E_5\ \{e_1,\ldots,e_5\}$ с двумя линейно ниль-независимыми элементами e_4, e_5. Сначала находим неподобные представления E_5 в виде алгебр Ли $L_5\ \{X_1,\ldots,X_5\}$ векторных полей, затем – компоненты метрик пространств из соотношений (1; 2) с учетом условия невырожденности $g(x,y)$. В случае $r > 5$ задача решается путем исследования на полноту каждого класса пространств $g_{3,y}$ с группой G_5.

Пусть L_5 сначала принадлежит структуре

$$[e_2,e_3] = e_1,\quad [e_1,e_4] = 2e_1,\quad [e_2,e_4] = e_2,$$
$$[e_3,e_4] = e_3,\quad [e_2,e_5] = -e_3,\quad [e_3,e_5] = e_2$$

алгебры Ли E_5 рассматриваемого случая из [3]. Базисные операторы $X_1,\ldots,X_5$ этой L_5 с транзитивной группой преобразований можно привести к одному из следующих двух типов $\left(p_{\sigma} = \partial/\partial x^{\sigma}\right)$:

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = x^2 p_1 + x^3 p_2, \quad X_4 = 2x^1 p_1 + x^2 p_2,$$
$$X_5 = -\frac{1}{2} x^{2^2} p_1 - x^2 x^3 p_2 - \left(1 + x^{3^2}\right) p_3; \tag{3}$$

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = x^2 p_1 + p_3, \quad X_4 = 2x^1 p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3,$$
$$X_5 = \left(\frac{1}{2} x^{3^2} - \frac{1}{2} x^{2^2}\right) p_1 + x^3 p_2 - x^2 p_3. \tag{4}$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (1), составленную для (3), и учитывая соотношения (2), получаем

$$\begin{aligned}
&g_{11} = \eta_{11}, \quad g_{22} = \beta^2 \cdot \eta_{22} - 2\beta \cdot u \cdot \eta_{12} + u^2 \cdot \eta_{11},\\
&g_{12} = \beta \cdot \eta_{12} - u\eta_{11}, \quad g_{13} = \beta^2 \cdot \eta_{13} - \beta \cdot u \cdot \eta_{12} + \frac{1}{2} u^2 \eta_{11},\\
&g_{23} = \beta^3 \cdot \eta_{23} - \beta^2 \cdot u \cdot (\eta_{22} + \eta_{13}) + \frac{3}{2} \beta \cdot u^2 \cdot \eta_{12} - \frac{1}{2} u^3 \cdot \eta_{11},\\
&g_{33} = \beta^4 \cdot \eta_{33} - 2\beta^3 \cdot u \cdot \eta_{23} + \beta^2 \cdot u^2 \cdot (\eta_{22} + \eta_{13}) - \beta \cdot u^3 \cdot \eta_{12} + \frac{1}{4} u^4 \cdot \eta_{11};\\
&\eta_{\mu\nu} = \left(y^3\right)^k \cdot \beta^{-4-3w} \cdot \left(1 + x^{3^2}\right)^{-2-k-3w} \cdot C_{\mu\nu}, \qquad \beta = \sqrt{v - \frac{1}{2} u^2},\\
&\qquad v = y^1 / y^3, \quad u = y^2 / y^3,
\end{aligned} \tag{5}$$

где постоянные $C_{\mu\nu}$ подчинены лишь условию невырожденности $g(x,y)$. Следовательно, L_5 типа (3) является алгеброй Ли инфинитезимальных относительных изометрий.

Для нахождения полной, т.е. максимальной размерности для данного пространства, алгебры Ли инфинитезимальных относительных изометрий составляем систему дифференциальных уравнений (1) для функций $g_{\alpha\beta}$ вида (5) с учетом соотношений (2). Ее интегрирование дает компоненты ξ^1, ξ^2, ξ^3 общих инфинитезимальных относительных изометрий искомых $L_r, r \geq 5$. В итоге получаем следующее. Если $2 + 3w \neq 0$ и $2 + k + 3w \neq 0$, то

$$\xi^1 = a_0 + x^2 a_1 + 2x^1 a_2 + \frac{1}{2} x^{2^2} c_0,$$
$$\xi^2 = b_0 + x^3 a_1 + x^2 a_2 + x^2 x^3 c_0, \quad \xi^3 = \left(1 + x^{3^2}\right) c_0,$$

где a_0, b_0, c_0, a_1, a_1 - постоянные. Поэтому пространства (5), для которых $2+3w \neq 0$ и $2+k+3w \neq 0$, обладают пятимерной полной алгеброй Ли инфинитезимальных относительных изометрий L_5 типа (3).

При $2+3w=0$ и $k \neq 0$ имеем

$$\xi^1 = \varphi + x^2\psi' - \frac{1}{2}x^{2^2}c_0 + 2x^1 \cdot \omega + \frac{1}{2}x^{2^2}\omega',$$
$$\xi^2 = \psi + x^2\omega - x^2x^3c_0, \quad \xi^3 = -\left(1+x^{3^2}\right)c_0;$$
$$\psi' = d\psi / dx^3, \quad \omega' = d\omega / dx^3,$$

где $\varphi = \varphi\left(x^3\right), \omega = \omega\left(x^3\right), \psi = \psi\left(x^3\right)$ – функции. В этом случае полная алгебра Ли L_∞ бесконечномерна, ее возможный базис имеет вид

$$p_1, x^3p_1, \ldots, \left(x^3\right)^s p_1, \ldots, p_2, x^2p_1 + x^3p_2, \ldots, \left(x^3\right)^t \cdot \left(tx^2p_1 + x^3p_2\right), \ldots,$$
$$-\frac{1}{2}x^{2^2}p_1 - x^2x^3p_2 - \left(1+x^{3^2}\right)p^3, \quad 2x^1p_1 + x^2p_2, \ldots,$$
$$\left(x^3\right)^{l-1} \cdot \left[\left(2x^1x^3 + \frac{1}{2}lx^{2^2}\right)p_1 + x^2x^3p_2\right], \ldots \qquad (s, t, l = 1, 2, \ldots),$$

а соответствующие пространства $g_{3,y}$ определяются метриками:

$$g_{11} = g_{12} = 0, \qquad g_{22} = \left(y^3\right)^k \cdot \left(1+x^{3^2}\right)^{-k} \cdot C_2,$$
$$g_{13} = \left(y^3\right)^k \cdot \left(1+x^{3^2}\right)^{-k} \cdot C_1, \quad g_{23} = -\left(y^3\right)^{k-1} \cdot y^2 \cdot \left(1+x^{3^2}\right)^{-k} \cdot \left(C_1 + C_2\right),$$
$$g_{33} = \left(y^3\right)^{k-2} \cdot \left(1+x^{3^2}\right)^{-k} \cdot \left[y^{2^2}C_2 + 2\left(y^{2^2} - y^1y^3\right) \cdot C_1\right];$$
$$C_1 \cdot C_2 \neq 0, \quad 2+3w=0, \quad k \neq 0.$$

При $2+k+3w=0$, $k \neq 0$ и $C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{23}^2 + C_{33}^2 \neq 0$

$$\xi^1 = a_0 + x^1\left(2b_1 - a_1\right) + x^2a_2 + \frac{1}{2}x^{2^2}a_3,$$
$$\xi^2 = b_0 + x^2b_1 + x^3a_2 + x^2x^3a_3, \quad \xi^3 = c_0 + x^3a_1 + x^{3^2}a_3.$$

Так что полная алгебра Ли L_7 семимерна, неразрешима, а

$$X_1 = p_1, \; X_2 = p_2, \; X_3 = p_3, \; X_4 = x^2p_1 + x^3p_2, \; X_5 = 2x^1p_1 + x^2p_2,$$
$$X_6 = -x^1p_1 + x^3p_3, \; X_7 = \frac{1}{2}x^{2^2}p_1 + x^2x^3p_2 + x^{3^2}p_3. \tag{6}$$

Метрики соответствующих $g_{3,y}$ имеют компоненты (5), для которых

$$\eta_{\mu\nu} = \left(y^3\right)^k \cdot \beta^{-4-3w} \cdot C_{\mu\nu},\ C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{23}^2 + C_{33}^2 \neq 0,\quad 2 + k + 3w = 0\,.$$

Наконец, если $2 + k + 3w = 0$, $k \neq 0$ и $C_{11} = C_{12} = C_{23} = C_{33} = 0$, то

$$\xi^1 = a_0 + x^2 a_1 + x^1\left(2b_2 - a_2\right) + x^{1^2} a_3 + \frac{1}{2} x^{2^2} a_4 + x^1 x^2 a_5\,,$$

$$\xi^2 = b_0 + x^1 b_1 + x^2 b_2 + x^3 a_1 + x^1 x^2 a_3 + x^2 x^3 a_4 + \left(x^1 x^3 + \frac{1}{2} x^{2^2}\right) a_5\,,$$

$$\xi^3 = c_0 + x^2 b_1 + x^3 a_2 + \frac{1}{2} x^{2^2} a_3 + x^{3^2} a_4 + x\ x^3 a_5\,.$$

Здесь полная алгебра Ли L_{10} является десятимерной: $X_1,\ldots,X_7$ – вида (6),

$$X_8 = x^1 p_2 + x^2 p_3\,,\quad X_9 = x^{1^2} p_1 + x^1 x^2 p_2 + \frac{1}{2} x^{2^2} p_3\,,$$

$$X_{10} = x^1 x^2 p_1 + \left(x^1 x^3 + \frac{1}{2} x^{2^2}\right) p_2 + x^2 x^3 p_3\,.$$

Она также неразрешима. Соответствующие пространства

$$g_{22} = -g_{13} = \left(y^1 y^3 - \frac{1}{2} y^{2^2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot C,\quad g_{11} = g_{12} = g_{23} = g_{33} = 0;$$

$$2 + k + 3w = 0,\quad k \neq 0,\quad C = const\,.$$

Обращаясь к алгебре Ли типа (4), получаем, что она является алгеброй Ли инфинитезимальных относительных изометрий. Полная L_5 соответствующего класса пространств $g_{3,y}$ пятимерна. Аналогично проводятся исследования для остальных шести структур алгебр Ли E_5. Таким образом, приходим, в частности, к следующему результату: если пространства $g_{3,y}$ допускают разрешимую транзитивную группу относительных изометрий G_5, алгебра Ли L_5 которой с двумя линейно ниль-независимыми элементами X_4, X_5, то полные алгебры Ли инфинитезимальных относительных изометрий этих $g_{3,y}$ могут быть бесконечномерными и конечномерными. Максимальная размерность последних равна десяти.

Список литературы

1. *Mok K., Patterson E., Wong Y.* Structure of symmetric tensors of type (0,2) and tensors of type (1,1) on tangent bundle // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 234. P. 253 – 278.

2. *Matsumoto M.* A relative theory of Finsler spaces // J. Math. Kyoto Univ. 1983. Vol. 23. P. 25 – 37.

3. *Мубаракзянов Г.М.* Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. вузов. Мат. 1963. № 3. С. 99 – 106.

V. Makeev

ON THE LIE ALGEBRAS OF THE INFINITESIMAL RELATIVE ISOMETRICS OF THE SPACES $g_{3,y}$ OF A CERTAIN TYPES

We study the infinitesimal relative isometrics of the weight w in the general metric spaces $g_{3,y}$ of the vector elements with a relative metric. The Lie algebras $L_r, r \geq 5$ of the infinitesimal relative isometrics of the spaces $g_{3,y}$, and the above mentioned spaces, which have solvable groups of the relative isometrics of the dimension five of a certain structures have been obtained in the article.

УДК 514.75

Т.Ю. Максакова
(*Балтийский военно-морской институт*)

СВЯЗНОСТИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСОЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Построены двойственные аффинные связности и двойственные проективные связности центрированной тангенциально вырожденной гиперполосы CH_m^r [1] проективного пространства P_n (1< *r* < *m* < *n*–1). Показано, что обобщенно нормализованная гиперполоса CH_m^r порождает: 1) в расслоении обобщенных нормалей 1-го рода четыре центропроективные