ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.15 1984

УДК 514.75

В.П. Цапенко

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ, ИНВАРИАНТНО ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К ГИПЕРКОМПЛЕКСУ $V_n(P,Q)$

В работе продолжается изучение n-параметрического невырожденного многообразия V_n пар (P,Q), порожденных гиперквадрикой Q и неинцидентной ей точкой P n-мерного проективного пространства P_n.

Гиперкомплекс V_n отнесен к реперу $R=\{\bar A,\bar A_i\}$ ($\bar A=\bar A_o$; $i,j,\ldots=\overline{1,n}$), где вершина A помещена в точку P, а вершины A_i – в гиперплоскость L_{n-1}, полярно-сопряженную точке P относительно гиперквадрики Q. Уравнение гиперквадрики Q и система уравнений Пфаффа гиперкомплекса V_n запишутся в виде

$$a_{ij}x^ix^j+(x^o)^2=0, \tag{1}$$

$$-\omega_i^o=M_{ij}\omega_o^j, \qquad \nabla a_{ij}=a_{ijk}\omega_o^k. \tag{2}$$

Здесь используется обозначение ∇ оператора, определенного в [1]. Двукратное продолжение системы (1), (2) дает

$$\nabla M_{ij}=M_{ijk}\omega_o^k,\quad \nabla M_{ijk}=M_{ijk\ell}\omega_o^\ell \quad (M_{ijk}=M_{ikj}),$$

$$\nabla a_{ijk}=a_{ijk\ell}\omega_o^\ell,\quad \nabla a_{ijk\ell}=a_{ijk\ell m}\omega_o^m.$$

Рассмотрим систему величин $\Gamma_{jk}^i=W^{i\ell}M_{\ell jk}$, где $W^{i\ell}$ – тензор, взаимный тензору $M_{\ell j}$. Формы Пфаффа $\tilde\omega_o^i=\omega_o^i$ и $\tilde\omega_j^i=(\omega_j^i-\delta_j^i\omega_o^o)-\Gamma_{jk}^i\omega_o^k$ удовлетворяют структурным уравнениям пространства аффинной связности [2] и, следовательно, формы $\tilde\omega_j^i$ определяют аффинную связность Γ на многообразии V_n. В репере R формы Пфаффа ω_o^i являются базисными формами и многообразия V_n и точечного пространства P_n. Пусть $R(\pi)$ – пространство гиперплоскостей π пространства P_n. Рассмотрим дифференцируемое отображение $f: P_n\to R(\pi)$, которое точке $P\in P_n$ ставит в соответствие гиперплоскость $L_{n-1}\in R(\pi)$. Система дифференциальных уравнений отображения f в репере R имеет вид (1). Г.Врэнчану предложил связывать с соответствием двух проективных пространств аффинную связность [3]. Из определения функций Γ_{jk}^i получаем

$$M_{mjk}=M_{mi}\Gamma_{jk}^i \tag{3}$$

Сравнивая (3) и (5.2) [4], приходим к выводу, что связность Γ является связностью Г.Врэнчану для отображения f. С гиперкомплексом V_n ассоциируется многообразие $E(0,n-1,n)$ [5] невырожденных нуль-пар (P,L_{n-1}), которое можно рассматривать как n-мерную поверхность в $2n$-мерном псевдоримановом пространстве $R(P,\pi)$ нуль-пар пространства P_n. Обозначим через G аффинную связность без кручения пространства $R(P,\pi)$, сохраняющую скалярные произведения при параллельном переносе [6]. Определяют эту связность формы Пфаффа $\tilde{\tilde\omega}_j^i=(\omega_j^i-\delta_j^i\omega_o^o)-G_{jk}^i\omega_o^k$, где $G_{jk}^i=g^{i\ell}M_{\ell jk}$. Здесь тензор $g^{i\ell}$ является взаимным к метрическому тензору $g_{\ell j}=M_{\ell j}+M_{j\ell}$ пространства $R(P,\pi)$. Поле симметрического тензора a_{ij} определяет на гиперкомплексе V_n структуру риманова пространства, объект связности которого находим по формулам [2]:
$\gamma_{jk}^i=\frac12 a^{i\ell}(a_{\ell jk}+a_{jk\ell}-a_{jk\ell})$, где $a^{i\ell}a_{\ell j}=\delta_j^i$.

Пусть $N(P_n)$ – нормализованное пространство [7]. Его нормалями второго рода являются гиперплоскости π, неинцидентные соответствующим им точкам: $P_ix^i+x^o=0$, где геометрический объект P_i удовлетворяет системе уравнений

$$\nabla P_i=P_{ij}\omega_o^j. \tag{4}$$

Внутреннюю связность пространства $N(P_n)$ [7] обозначим Π. Она определяется формами $\bar\omega_j^i=(\omega_j^i-\delta_j^i\omega_o^o)-\Pi_{jk}^i\omega_o^k$, где $\Pi_{jk}^i=\delta_j^iP_k+\delta_k^iP_j$.

Т е о р е м а 1. Если внутренняя связность Π нормализованного пространства $N(P_n)$ совпадает со связностью Врэнчану Γ_1, то связность Γ эквиаффинна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Pi^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}$, тогда получим: $M_{ijk}=M_{i(j}P_{k)}$, $M_{ijkl}=M_{i(j}P_{k)}P_l+M_{i(j}P_{k)l}+2M_{il}P_jP_k$. Используя эти соотношения, находим тензор кривизны связности Γ:

$$R^i_{jkl}=2(\delta^i_{(l}P_{k)}P_j+2\delta^i_jP_kP_l-\delta^i_{(l}P_{k)j}+\delta^i_lM_{jk}-\delta^i_kM_{lj}),$$

а затем ее тензор Риччи: $R_{ij}=-2P_{(ij)}$.

О п р е д е л е н и е. Гиперкомплексом V^H_n называется гиперкомплекс $V_n(P,Q)$, для которого выполнены условия $a_{ijk}=a_{ij}P_k$, где P_i удовлетворяют системе уравнений (4).

Т е о р е м а 2. Для гиперкомплекса V^H_n связность γ является вейлевой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Находя ковариантный дифференциал тензора a_{ij} относительно связности γ в классе V^H_n, получим: $\tilde\nabla a_{ij}=2a_{ij}\theta$, где $\theta=P_k\omega^k_0$.

О п р е д е л е н и е. Гиперкомплексом V^{SH}_n называется гиперкомплекс V^H_n, для которого выполнены условия

$$M_{[ij]}=0. \qquad (5)$$

Т е о р е м а 3. Для многообразий V^{SH}_n связность γ является эквиаффинной в том и только том случае, если связность Π эквипроективна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Тензор Риччи связности γ для многообразий V^{SH}_n имеет вид:

$$R_{ij}=nP_{ij}+2(2nP_iP_j+(1-n)M_{ij}-nP_kP_la^{kl}a_{ij}).$$

Отсюда, учитывая условия (5), получаем, что связность γ эквиаффинна тогда и только тогда, когда симметричен тензор P_{ij}, что является условием эквипроективности связности Π.

Т е о р е м а 4. Связность Π эквипроективна для многообразий V^{SH}_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $n=2$ для комплекса V^H_n получаем конечное соотношение:

$$P_{12}-P_{21}=3(M_{12}-M_{21}),$$

откуда, учитывая требование (5) определения класса V^{SH}_n, приходим к условию $P_{12}=P_{21}$ эквипроективности связности.

С л е д с т в и е. Связность γ эквиаффинна для многообразий V^{SH}_2.

Список литературы

1. Цапенко В.П. Семейство плоскостей, ассоциированных с гиперконгруэнцией V_{n-1}. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1983, Вып. 14, с. 103–106.

2. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. – Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР), 1979, с. 5–246.

3. Vrănceanu G. Sul tensore associato ad una corrispondenza fra spazi projettivi. Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, N4, 489–506.

4. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами. – Тр. Геометрич. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1965, с. 65–107.

5. Кондакова Э.М., Ивлев Е.Т. О n-семействе невырожденных нуль-пар в P_n. – Материалы итоговой научной конференции по математ. и механике. Томск, 1970, с. 125–127.

6. Бишоп Р.Л., Криттенден Р.Дж. Геометрия многообразий. М., 1976.

7. Норден А.П. Пространства аффинной связности, М., 1976.