

С. Л. Катречко

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССУЖДЕНИЙ В МАТЕМАТИКЕ: ТРАНСЦЕНДЕНТАЛЬНЫЙ ПОДХОД¹

Рассматривается кантовский подход к проблеме конструирования математических объектов и накладываемых на математику трансцендентальных ограничений. Автор статьи размышляет над актуальностью концепции Канта для современной философии и методологии математики.

The article scrutinises Kant's approach to the problem of constructing mathematical objects and transcendental limitations of mathematics. The author ponders the relevance of Kant's concept to modern philosophy and the methodology of mathematics.

Математика и трансцендентальный метод

Трансцендентальный метод связывают с именем И. Канта. Основной вопрос трансцендентализма звучит так: «Как возможен тот или иной феномен?», а в нашем случае — это вопрос о том, *как возможно математическое познание*. Общее определение трансцендентального Кант дает во «Введении» к своей «Критике чистого разума» (КЧР): «Я называю *трансцендентальным* всякое познание, занимающееся не столько предметами, сколько видами нашего познания предметов, поскольку это познание должно быть возможным а priori. Система таких понятий называлась бы *трансцендентальной философией*» [8, с.44]².

¹ Данное исследование поддержано грантом РГНФ № 06-03-00197а.

² Уточненный вариант перевода: «Я называю трансцендентальным всякое познание, которое имеет дело не столько с предметами, сколько с нашим способом познания предметов, поскольку он [способ познания] должен быть возможным а priori. Система таких понятий называлась бы трансцендентальной философией (B25). Ср. также определение из 1-го

Из первой части определения применительно к нашему случаю следует, что предметом *трансцендентальной философии математики* выступает анализ такого «вида познания», как математическая деятельность, которая конституируется Кантом как *чувственно—рассудочный* вид познания. Вторая часть кантовского определения нацеливает на поиск априорных оснований математики, т. е. таких оснований, которые придадут ей характер аподиктичности. Как отмечает Кант, «в основе всякой необходимости всегда лежит [система] *трансцендентальных условий*» [8, с. 504]. Поэтому первой задачей трансцендентального анализа выступает выявление связанной системы *априорно-трансцендентальных условий* и построение на этой основе категориального базиса математики. В первом приближении такими основаниями (хотя и не единственными) математической деятельности выступают *пространство* и *время*, априорность которых и обеспечивает аподиктичность математического знания. С другой стороны, наличие подобных априорных форм позволяет *синтезировать* новые (нетривиальные) результаты, т. е. получать (математические) синтетические суждения *a priori*. Поэтому выявление подобных *онтологических* и *гносеологических допущений* современной математики позволяет ответить на поставленный Кантом вопрос «как возможна математика?».

Основы трансцендентального метода были заложены в античности, в трудах Платона и Аристотеля. Как пишет А. Ф. Лосев, «под трансцендентализмом [следует] понимать философию, которая стремится установить условия возможности для существования данного предмета (например, условием мыслимости зеленого цвета является цвет вообще, а условием мыслимости цвета вообще является наличие объективной субстанции..., или, как рассуждают субъективисты, человеческая чувственность со своими априорными формами пространства и времени)» [17, с. 49]. Сущность же трансцендентального метода античности «заключается в том, что он выставляет «гипотезу», т. е. ту или иную чисто смысловую конструкцию, с -

изд. КЧР: «[трансцендентальное имеет дело]... с нашими априорными понятиями о предметах вообще» (A11—12).

точки зрения которой рассматривается тот или иной алогический материал, причем эта «гипотеза» является смысловым условием [ср. с кантовским трансцендентальным условием. — С. К.] его возможности [16, с. 255].

Кант как мыслитель «эпистемологической эпохи» Нового времени придает трансцендентальному гносеологическое значение: трансцендентальное условие — это не (онтологическое) условие существования отдельных вещей, а условие (возможности) их познания. Как замечает Кант в «Пролегоменах», «многократно указанное мной слово *трансцендентальное* означает то, что опыту (a priori) хотя и предшествует, но предназначено лишь для того, чтобы сделать возможным опытное познание» [9, с. 199].

Введенное выше *общее понимание* кантовского трансцендентализма нуждается в ряде уточнений. Первое и главное из них связано с общей интенцией кантовского подхода, а именно с его *критическим подходом*. В нашем случае это преломляется так: необходимо осуществить построение такого *онтологического* категориального базиса математики, который будет опираться на реальную — *гносеологическую* — практику математической деятельности, осуществляемую *трансцендентальным субъектом*. Т. е. это должна быть не какая-то «красивая» система понятий, а система, соотносимая с «опытом» математической работы, благодаря чему удастся ограничить до разумных пределов с неизбежностью «выходящую за рамки опыта метафизическую спекуляцию»³. При этом Кант опирается на понятие *трансцендентального субъекта*. Это указывает на то, что надо избегать излишнего психологизма и не ограничивать себя частными случаями описания своего творчества математиками (типа описания А. Пуанкаре), а вы-

³ Полностью преодолеть метафизические спекуляции невозможно, поскольку разум человека, по Канту, обладает природной склонностью к метафизике (metaphysica naturalis) [8, с. 42]. Например, математика, в каком-то смысле, сплошная спекуляция, поскольку постулирует и работает с метафизическими (идеальными) сущностями типа кругов или прямых, которые не существуют в физическом мире.

явить универсальную модель математической деятельности⁴. В частности, Кант описывает математическую деятельность (с чем, разумеется, можно не согласиться) как «*познание посредством конструирования понятий*» [8, с. 423], что предполагает совместную работу *рассудка* и *воображения*, т. е. определенное сочетание дискурсивных и интуитивных процедур.

Реализация подобной стратегии связана с различием «*априорное vs. трансцендентальное*», суть которого состоит в том, что не любое *априорное* понятие является *трансцендентальным*, и поэтому надо критически ограничить область априорного только теми понятиями, которые получили проверку с помощью *трансцендентального критерия*. Остановимся на этом различии чуть подробнее, поскольку при стандартном изложении философии Канта априорное и трансцендентальное часто отождествляются, хотя оно является ключом для понимания кантовского трансцендентализма. Реконструируем итоговое кантовское определение *трансцендентального*, «*влияние которого простирается на все дальнейшие рассуждения*» КЧР [8, с.73]: «Трансцендентальным (т. е. касающимся возможности или применения априорного познания) следует называть не всякое априорное знание..., а только знание о том, (1) что [и почему] те или иные представления (созерцания или понятия) вообще не имеют эмпирического происхождения, и о том, каким образом [и как это возможно, что] эти представления тем не менее могут а priori относиться к предметам опыта» (вставки в квадратных скобках наши. — С. К.).

Существенным здесь является вторая часть определения, где вводится требование ограничения сферы неэмпирического знания путем ее соотнесения с «предметами опыта», что как раз и осуществляется в ходе познавательного акта. Это можно

⁴ Этим трансцендентальный подход в корне отличается от психологизма, но точную грань между ними провести трудно. Это относится, например, и к творчеству более современного представителя трансцендентализма, основателя феноменологии, Э. Гуссерля. К сожалению, формат статьи не позволяет эту тему развернуть подробно.

называть слабым пониманием *трансцендентального*. Обратим внимание также на то, что здесь ставится вопрос об *априорном* отношении *априорных* (неэмпирических) представлений. Эта двойственная априорность кажется избыточной (как «масло масляное»), но это не так. *Трансцендентальное* у Канта имеет характер *двойной необходимости*. Первая из них связана с всеобще-необходимым характером априорных (неэмпирических) представлений. Вторая — с *необходимым* характером отношения этих неэмпирических представлений к опыту. Например, если будет показано, что *пространство* с *необходимостью* сопровождает представление предметов вообще, то его статус — трансцендентальный, если же пространство является лишь формой созерцания «внешних» предметов (т. е. будет «ограничиваться исключительно предметами чувств»), то его статус будет лишь априорным (метафизическим). Вот как это Кант поясняет в «Критике способности суждения»: «*Трансцендентальный принцип* — это принцип, посредством которого представляется априорное общее условие, единственно допускающее, чтобы вещи могли стать объектами нашего *познания*. Напротив, *метафизическим* принцип называется, если он представляет априорное условие, допускающее, чтобы объекты, понятие о которых должно быть дано эмпирически, могли быть определены априорно. Так, принцип познания тел в качестве субстанции и изменяющихся субстанций трансцендентален, если этим утверждается, что изменение должно быть вызвано какой-либо причиной; он метафизичен, если утверждается, что это изменение вызывается *внешней* причиной: в первом случае, для того чтобы априорно познать положение, тело должно мыслиться только посредством онтологических предикатов (чистых понятий рассудка), например, как субстанция; во втором в основу должно быть положено эмпирическое понятие тела (как вещи, движущейся в пространстве), что позволяет априорно усмотреть, что телу присущ предикат движения посредством внешней причины» [10, с. 52].

Поскольку не все априорное является трансцендентальным, то онтология должна быть очищена от частно-метафизи-

ческих, но не универсально-трансцендентальных принципов. Это достигается путем тщательного анализа нашей познавательной практики, в которой нередко *частное* трактуется как *общее*, а *случайное* — как *необходимое*. Сразу же после введения слабого критерия *трансцендентального* Кант (на той же странице) формулирует сильный *трансцендентальный критерий*, подчеркивая, что «а priori относиться к предметам [познания]» могут только *действия чистого мышления*⁵. Тем самым *трансцендентальным* по Канту является то, что обеспечивает *встречу* в познавательном акте имеющего *априорные* формы знания *субъекта* и *объекта* («предмета опыта») познания, а таковыми могут быть только [познавательные] «действия мышления». Только в акте познания и осуществляется подобная «встреча», а все остальное: априорное, спекулятивное, метафизическое, — не имеющее прямого отношения к *действиям рассудка* в ходе познания должно быть отброшено как нерелевантное.

Следует также обратить внимание на еще одно обстоятельство. Современная математика включает в себя различные типы математических объектов и разнообразные способы «работы» (математические операции) с ними, т. е. является достаточно разнородным образованием. Можно говорить о неоднородности двух типов. С одной стороны, есть *горизонтальная* неоднородность различных областей математики, к которым можно отнести, например, «топологию и абстрактную алгебру как два способа понимания в математике»⁶, или бурбакистские структуры алгебры, топологии и порядка [3]⁷. С другой

⁵ Там же Кант определяет науку о «действиях чистого рассудка» как трансцендентальную логику [8, с.74].

⁶ Заглавие одноименной статьи Г. Вейля [5].

⁷ Заметим, что две первые структуры Бурбаки совпадают с классификацией Вейля и соответствуют античному различению в составе математики *арифметики* и *геометрии*. Структуры же порядка занимают как бы промежуточное положение между ними. Онтологически это различие можно пояснить так: топологические структуры «работают» с безлично-неопределенными объектами типа точек, алгеб-

стороны, это вертикальная неоднородность, связанная с тем, что в математике используются абстракции различных типов. В силу неоднородности различных разделов математики надо учитывать, что, возможно, в каждой из них будет свой, отличный от других, набор математических «действий рассудка» в качестве трансцендентальных условий.

С учетом этих уточнений можно выделить следующие основания математической деятельности: *априорные*⁸, *априорно-трансцендентальные*, *трансцендентальные* (трансцендентально-формальные) и *трансцендентально-материальные*⁹.

Априорно-трансцендентальные основания. Трансцендентальная логика

Этот тип оснований связан со слабым пониманием трансцендентального. В первом приближении они являются конкретизацией априорных оснований: онтологических и гносеологических допущений. В философии математики анализу априорно-трансцендентальных оснований уделялось недостаточно внимания, правда, это частично компенсировалось их разработкой в рамках логической семантики и метаматематики.

По Канту, выявлением этих оснований должна заниматься *трансцендентальная логика*. В отличие от *общей* (формальной) логики [allgemeine Logik], которая «*отвлекается от всякого содержания познания...* [и изучает] одну лишь **форму** познания в понятиях, суждениях и умозаклчениях» [8,

раические — с конкретно-индивидуальными объектами типа чисел (каждое число как бы имеет свое имя), «объекты работы» структур порядка могут быть сравнимы (упорядочены), т.е. они не полностью безличны, как точки, но и не индивидуальны, как числа.

⁸ Этот тип оснований был проанализирован нами ранее (см., например, [12]) и здесь обсуждаться не будет.

⁹ Этот тип оснований, связанный с кантовской концепцией *трансцендентальной материи* // *косвенного явления* из «Opus postumum» [11], мы здесь из-за ограниченного объема статьи рассматривать не будем.

с. 121], т. е. исследует формальные законы универсума рассуждений, «трансцендентальная логика имеет дело с определенным *содержанием*» ([8, с. 120]; выделено мной. — С. К.). Чем важно это кантовское различие для математики? По своей сути математика тяготеет к работе с *однородным количественным универсумом*, отвлекаясь от качественной неоднородности моделируемой реальности. Математику, в отличие от физики, не интересует «природа» (фюзис) изучаемых объектов, поскольку она сосредотачивает свое внимание на исследовании *количественных форм* (абстракций). Например, если мы возьмем аристотелевский «медный шар», то геометр будет исследовать закономерности, связанные с «шарообразностью» этого объекта, отвлекаясь от его «медности»: именно это и позволяет говорить об *универсальности* выявляемых математикой законов, применимых в нашем примере к любому шару вообще.

Идея же трансцендентальной логики состоит в том, что при разработке *синтаксических* формализмов необходимо учитывать *семантику* (онтологию) универсума, в частности, его структурную и качественную разнородность, что ведет к необходимости вводить определенные семантические («содержательные») ограничения на формальные (синтаксические) логические выводы путем трансцендентальной разметки объектов и областей математического рассуждения. Достаточно показательным примером такой разметки служит *теория типов* Б. Рассела, которая за счет этого позволила «заблокировать» возникающие в теории множеств парадоксы (заметим, что подобные ограничения, хотя и более слабые, вводятся во всех последующих аксиоматиках теории множеств). Элементарным примером подобного семантического ограничения является *запрет* деления на ноль, хотя чисто синтаксически (формально) «0» ничем не отличается от других чисел.

Суть кантовской трансцендентальной логики (на примере силлогистики) изложена в его «Аналитике понятий» [8, с. 98]. Анализируя суждение «Все тела делимы», Кант замечает, что формально-логически функции субъекта и предиката в данном

суждений не зафиксированы. Это, например, позволяет совершить «обращение» этих понятий и построить суждение «Некоторое делимое есть тело». Трансцендентальная логика, «имея дело с определенным содержанием», маркирует понятие «тела» как *субстанцию*, что запрещает его использование в качестве предиката. Как отмечает В. Н. Брюшинкин [2], учет этих соображений приводит к тому, что (1) из четырех возможных суждений допустимы только суждения «Тело есть (не есть) делимое», в которых *субстанциональное понятие* является субъектом; (2) субстанционально-субъектные суждения не допускают обращения; (3) суждение «Все тела делимы» не может использоваться как большая посылка 1-й фигуры силлогизма (так как в меньшей посылке понятие «тело» уже предикат). С учетом этих ограничений будет неправомерно следующее, формально правильное, рассуждение «Все тела делимы. Все атомы есть тела. Следовательно, все атомы делимы».

Кантовский подход может быть распространен и на современные логико-математические формализмы, которые еще в большей степени отвлекаются от содержательной семантики естественного языка¹⁰. Например, суждение «Некоторые *S* суть *P*» записывается в логике предикатов формулой $\exists x(S(x) \& P(x))$, которая в силу коммутативности конъюнкции тождественна формуле $\exists x(P(x) \& S(x))$, хотя такая перестановка некорректна с точки зрения семантики: мы не имели в виду фразу «Некоторые *P* суть *S*». Т. е. потеря в синтаксисе логики предикатов смысловой информации о *субъекте* и *предикате* суждения может привести к нежелательным с семан-

¹⁰ В русле кантовского трансцендентализма движется программа ультраинтуиционизма А. Есенина-Вольпина, который призывает к более аккуратному использованию формальных конструкций в ходе математического рассуждения, в частности, к более точному учету модальности рассуждений [6]. Особый интерес представляет и его идея о различении формул и формулоидов [7], что позволяет подвергнуть сомнению правомерность процедуры геделезации и, соответственно, истинность теоремы Геделя о неполноте.

тической точки зрения результатам из-за введения *универсалии* P как субъекта суждения в номиналистический универсум логики. При этом введенный семантический запрет не моделируется на уровне синтаксиса, например, путем лишения конъюнкции свойства коммутативности.

В частности, учет (сложно-) *сочиненности/подчиненности* предложений позволяет решить парадокс Б. Рассела, поскольку расселовские противоречия типа $a \ \& \ \sim a$ на самом деле являются выражениями типа $a \ \& \ \sim f(a)$, которые формально непротиворечивы из-за отнесения противоречивых свойств к разным онтологическим уровням универсума¹¹.

Отметим, что в схожем концептуально-семантическом ключе может быть решен и известный парадокс Бурали — Форти, если мы учтем *единственность* «множества всех множеств» как «the-объекта» (ср. «самая высокая гора»). Уникальный характер этого максимума не позволяет обращаться с ним как с обычным множеством. Понятно, что после образования из него нового максимального объекта старый максимум исчезает и процедура сравнения мощностей двух максимумов (старого и нового) в общем случае некорректна. В частности, нельзя говорить, что новый объект, полученный из старого, *содержится* в старом, поскольку старого объекта («множества всех множеств») уже нет, но именно процедура

¹¹ В нашей работе [13] предложено чисто семантическое (философское) решение парадокса Рассела, суть которого состоит в следующем. Необходимо четко различать свойства разных уровней (сущностей). Например, в формулировке расселовского парадокса брадобрея можно считать, что брадобрей, находясь дома, является лишь жителем (свойство первого уровня) и поэтому может бриться дома как житель, а брадобреем (свойство второго уровня) он становится только тогда, когда приходит в цирюльню (например, надевая на себя табличку «брадобрей»), и тогда бреет сам себя. При этом мы заменяем расселовский вопрос на вопрос «где бреется житель-брадобрей?» и «расщепляем» расселовского *брадобрея* на две составляющие: парадокса в рамках нашей модели не возникает (заметим, что при этом мы отказываемся также от неявно принимаемого математиками постулата о *неизменяемости* математических объектов).

«сравнения» (мощностей) нового и старого объектов и конституирует парадоксальный результат Бурали — Форти¹².

Заметим также, что кантовская идея трансцендентальной логики в определенном смысле является развитием средневековой *теории суппозиций*, в которой тоже, по сути, различались синтаксический и семантический уровни рассмотрения. С формальной же точки зрения трансцендентальную логику можно рассматривать как металогику с более богатыми выразительными возможностями, благодаря чему можно модифицировать — ограничить или расширить — применение формально-логических правил вывода логики. В свете же обсуждаемой нами проблемы развитие идеи трансцендентальной логики позволяет сформулировать и более радикальный вывод, а именно: можно поставить под сомнение существующий ныне подход образования современных формализмов, последовательно развитый Г. Фреге (1848—1925), Д. Гильбертом (1862—1943), Б. Расселом (1872—1970) и получивший название логик фреге-расселовского типа, который основан на жестком разведении синтаксиса и семантики формальных систем. Хотя такое различие и обеспечивает *строгость* формализмов, но вместе с тем именно оно приводит к их семантическим неувязкам (парадоксам и известным теоремам об ограниченности формализмов). Кантовская же идея заключается в более мягком подходе к формализации, при котором определенное содержание о структуре (онтологии) универсума рассуждений должно быть учтено на синтаксическом уровне. Поэтому можно попробовать по-новому провести разграничение между син-

¹² Одним из источников логико-математических парадоксов (как в случае с парадоксом Рассела) выступает то, что математики обращаются с математическими объектами как с обычными физическими объектами, не учитывая их особый онтологический статус. Например, в математическом мире (как и в микромире) нет (уникальных) индивидов: в частности, все *двойки* и/или *тройки* ничем не отличаются друг от друга. Хотя отсюда еще не следует, что эти объекты *не—единичны* и их можно беспрепятственно размножать, как это происходит в рассуждении Бурали — Форти.

таксической и семантической компонентами формальных систем или даже перейти к построению формализмов другого типа.

Трансцендентальные основания математической деятельности

В отличие от первых двух типов оснований, которые имели преимущественно «объективный» (онтологический) характер, данный тип оснований связан с тем, что математическое рассуждение осуществляет не рассудок вообще (например, божественный разум), а человеческий рассудок, хотя и взятый в модусе всеобщности, т. е. трансцендентальный субъект. В силу этого любое математическое рассуждение и выполняющая его семантическая модель должны быть соотнесены с познавательным «устройством» (структурой) проводящего это рассуждение трансцендентального субъекта. В сфере математики можно выделить два основных положения подобного (гносеологического) рода.

Прежде всего, любое рассуждение осуществляет *конечный субъект*, который, в силу этого, не имеет возможности совершать бесконечные «действия чистого мышления» (выше мы уже говорили об этом, когда обсуждали восходящую к Канту *финитную установку* Гильберта). В этом смысле математика является «искусством» работы с «прирученной бесконечностью», или, как сказал Хао Ван, математики могут работать с *бесконечным* лишь с помощью созданных *конечных* методов [4]. Понятно, что это требование не ведет к полному изгнанию из математики потенциальной и даже актуальной бесконечности, если найдены средства ее «приручения». Но любая бесконечная математическая процедура должна быть подвергнута серьезной проверке на совместимость с нашей конечностью и принята только тогда, когда найдено соответствующее «действие рассудка» по ее осуществлению. В этом смысле кантовский трансцендентализм предвосхитил развитие *конструктивной математики* [15, 19] и различных программ конструктивизма.

Более трудной задачей, стоящей перед трансцендентальной философией, является нахождение приемлемой модели математического способа познания. Имя Канта связывают, прежде всего, с его концепцией априорных форм, постулирующей непустоту познающего субъекта. В силу этого любое знание, в том числе и математическое, помимо *онтологических* (объективных) содержит еще и *гносеологические* (субъективные) характеристики, что необходимо четко различать¹³. Мы смотрим на мир как бы через систему «фильтров» (априорных форм), которые предопределяют наше мировоззрение. И одной из главных задач трансцендентальной философии как раз и является выявление имеющихся у трансцендентального субъекта набора этих априорных форм. Для математики таковыми являются форма *пространства*, лежащая в основании геометрии, и форма *времени*, лежащая в основании арифметики. Современная парадигма математического знания кладет в основание математики концепт *множества*. Однако это не противоречит кантовскому подходу, а скорее является его развитием, так как *множество* в определенном смысле является пространственно-временной сущностью: в нем можно выделить *пространственную* и *временную* смысловые «составляющие». С одной стороны, любое множество мыслится как набор *со* — существующих элементов, т. е. как некоторое объемлющее свои элементы *пространство*. С другой стороны, элементы множества определенным образом упорядочены, и, соответственно, каждое множество обладает своей *счетной* «мощностью» (*ординалом* и/или *кардиналом*), что указывает на концепт *времени*, лежащий в основе любого *пересчета*. При этом *множество* выполняет роль *относительной априорной формы*. С его помощью задаются остальные понятия современной математики, что предопределяет как перспек-

¹³ Например, в суждении «Яблоко является красным и объемным» предикат красноты — реальный, а предикат объемности — гносеологический (субъективный). Как сказал в свое время Б. Рассел, мы смотрим на предметы через пространственные (синие) очки, приписывая (по ошибке) характеристики этих очков (синеву) самим предметам.

тивы, так и возможные ограничения ее развития. Соответственно, уточнение концептуального (смыслового) содержания концепта множества — одна из задач трансцендентальной философии математики¹⁴.

Трансцендентальный конструктивизм. Однако кантовский трансцендентальный субъект, являясь *активной* стороной познавательного акта, не сводится только к набору априорных форм (ср. с критикой К. Поппером «бадеиной теории познания»), а представляет собой *систему познавательных способностей*, «двумя основными стволами» которой являются *чувственность* и *рассудок*. Соответственно, каждая развитая познавательная деятельность представляет собой их определенное соотношение. Кантовская концепция математики как «*познания посредством конструирования понятий*» означает, что в математической деятельности задействованы как *дискурсивный рассудок*, ответственный за работу с понятиями, так и «дающие» *интуитивные* созерцания способности, к которым относятся наши *чувственность* и *воображение*. При этом нужно особо подчеркнуть, что Кант строит модель гуманитарной математики. Например, чрезвычайно важным является то обстоятельство, что наш человеческий рассудок не является *интуитивным* (каков, например, божественный разум¹⁵), и поэтому любое концептуальное математическое рассуждение должно опираться на созерцание: понятие должно быть сконструировано, переведено в соответствующее созерцание, без чего математические концепты представляют

¹⁴ Аналогичное рассуждение справедливо и для теории категорий, концептуальным основанием которой выступает особое функциональное пространство (стрелок), с помощью которого задаются ее объекты. В отличие от концепта множества здесь происходит отказ от понимания пространства как особого вместилища объектов, что является более строгой и адекватной интерпретацией концепта пространства.

¹⁵ Этот тип рассудка Кант описывает в своей «Критике способности суждения» [10, с. 279—284].

собой красивые, но пустые фикции. В этом и заключается специфика *человекоразмерной математики*, а никакой другой математики, по Канту, быть не может. Вот ключевая кантовская характеристика математической деятельности:

«Математическое знание есть знание посредством конструирования понятий. Но конструировать понятие — значит показать а priori соответствующее ему созерцание. Следовательно, для **конструирования понятия требуется не эмпирическое созерцание**, которое, стало быть, как созерцание есть единичный объект, но тем не менее, будучи конструированием понятия (общего представления), должно выразить в представлении *общезначимость* для всех возможных созерцаний, подходящих под одно и то же понятие. Так, я конструирую треугольник, показывая предмет, соответствующий этому понятию, или при помощи одного лишь воображения в чистом созерцании, или вслед за этим также на бумаге в эмпирическом созерцании, но и в том и в другом случае совершенно а priori, не заимствуя для этого образцов ни из какого опыта. Единичная нарисованная фигура эмпирична, но тем не менее служит для выражения понятия без ущерба для его всеобщности, так как **в этом эмпирическом созерцании я всегда имею в виду только действие по конструированию понятия**, для которого многие определения, например величины сторон и углов, совершенно безразличны, и потому я отвлекаюсь от этих разных [определений], не изменяющих понятия треугольника» ([8, с.423]; выделено полужирным нами. — С. К.).

В качестве примера Кант приводит теорему о равенстве суммы углов треугольника 180° и показывает, что для получения этого результата необходимы были дополнительные геометрические построения: проведение дополнительной прямой через одну из вершин треугольника и продолжение через эту же вершину двух других его сторон, которые выполняют здесь роль сконструированного «созерцания».

Важным для понимания сути кантовской концепции является проводимое им различие между «эмпирическим созерцанием» — например, вот этого нарисованного треугольника —

и «общеэзначимым созерцанием» как «действием по конструированию понятия [треугольника]». Математика не может ограничиться одними единичными созерцаниями, так как это лишило бы ее статуса *аподиктического знания*. Ведь математическая теорема о сумме углов треугольника верна не только для используемого в доказательстве примера треугольника, но для любого другого треугольника. По сути, здесь Кант разделяет основополагающую характеристику математической деятельности, данную еще Платоном в кн. 6 «Государства», который характеризует математику следующим образом: «Те, кто занимается геометрией, счетом и тому подобным, предполагают в любом своем исследовании, будто им известно, что такое чет и нечет, фигуры, три вида углов и прочее... [И] когда они пользуются чертежами и делают отсюда выводы, их мысль обращена не на чертеж, а на те фигуры, подобием которых он служит [чертеж же является «образным выражением того, что можно видеть не иначе как мысленным взором» (там же). — С. К.]. Выводы свои они делают только для четырехугольника самого по себе и его диагонали, а не для той диагонали, которую они начертили. Так и во всем остальном...» [510d—e; вставки и выделение сделаны нами. — С. К.].

И Платон, и Кант, безусловно, правы в том, что математик делает свои «выводы» не для какого-то единичного созерцания, каковым, например, является нарисованный на бумаге треугольник. Более того, математическая теорема о том, что сумма углов треугольника равна 180° , для «эмпирического» квазитреугольника вообще не верна (resp. рисунок вообще не является треугольником, а лишь его подобием), поскольку математик «работает» с «треугольником самим по себе», или платоновской «идеей» треугольника. Вопрос, на который обращает внимание трансцендентализм, состоит в том, откуда у нас вообще берется «идея» треугольника (или других математических объектов), т. е. какие «действия чистого мышления» приводят к ее образованию. Платон решает это вопрос просто

— идеи существуют сами по себе, а наша душа каким-то образом причастна к «миру идей» и «припоминает» их (концепция анамнезиса). Понятно, что это простое решение не может удовлетворить последующую философию. Это скорее констатация факта (что является безусловной заслугой Платона!), а не ответ на вопрос о генезисе (математических) идей. На этот вопрос попытался ответить Аристотель. Суть его подхода такова. Реально существуют лишь единичные вещи, например единичные конкретные треугольники, а наш ум, *абстрагируясь* сначала от материи, а потом от несущественных характеристик (для треугольника вообще таковым является, например, его размер или величина его углов), образует *общую идею* треугольника. В Новое время концепция абстрагирования получила развитие в работах непосредственного предшественника Канта — Дж. Локка. Но подобная концепция сталкивается с двумя серьезными трудностями. Одна из них связана с тем, что в природе вообще нет никаких треугольников, кругов, прямых линий и других — *идеальных* — математических предметов. Онтологический статус математических объектов специфичен: «числа на дороге не валяются». Поэтому для объяснения генезиса математических концептов, помимо абстрагирования, необходима также и процедура *идеализации*, которая с необходимостью присутствует в процессе создания идеальных конструкторов. Вторая трудность была впервые выявлена Дж. Беркли, который напрямую полемизирует с Локком по вопросу о возможности общих представлений. Дело в том, что любое созерцание имеет *единичный* характер (для Канта это выступает уже как аксиома, с которой начинается КЧР). Мы не можем *созерцать* треугольник вообще! Вот что пишет в этой связи Беркли: «Что может быть легче для каждого, чем немного вникнуть в свои собственные мысли и затем испытать, может ли он достигнуть... общей идеи треугольника, который ни косоуголен, ни прямоуголен, ни равносторонен, ни равнобедрен, но который есть вместе с тем всякий и никакой из них» [1, с. 159].

Тем самым Канту предстоит решить следующую дилемму: с одной стороны, любое созерцание имеет единичный характер (Беркли); с другой стороны, математика работает с идеями (общими представлениями), отражением которых выступают как единичные эмпирические созерцания (рисунки), так и единичные сознательные образы (Платон).

В «Критике чистого разума» Кант дает элегантное решение этой дилеммы. Он утверждает, что математика работает не с эмпирическими единичными, а с «общезначимыми созерцаниями», которые он также называет «чувственными понятиями»¹⁶. Тем самым он вводит своеобразное связующее звено между «стволами познания», некоторые общие *интуиции*, с которыми соотносятся и рассудочно-дискурсивно-идеальные математические *концепты* и чувственно-единично-эмпирические созерцания. Чем являются кантовские «общезначимые» представления? И каким образом преодолеть обоснованную критику Беркли о невозможности общих созерцаний у человека: ведь мы на самом деле не можем созерцать треугольник вообще? Конечно, мы видим вот этот, нарисованный на доске мелом, конкретный (единичный) треугольник, но вместе с этим «созерцаем» идею «треугольника самого по себе». Как это возможно? Трансцендентализм призывает нас обратить внимание на действия нашего сознания, т. е. каким образом происходит восприятие нарисованного треугольника? Но сначала спросим себя, а каким образом треугольник обрел статус реального существования? Хотя нас скорее интересует его появление на школьной доске? Путем рисования! Судя по всему, в нашей душе он возникает аналогичным образом, когда мы начинаем «рисовать» эту фигуру. Эту процедуру Кант называет *фигурным синтезом воображения*. При этом Кант неявным образом опирается на концепцию познания Платона, который в диалоге «Филеб» проводит различие между *писцом*,

¹⁶ Термин «чувственное понятие» выглядит как оксюморон, поскольку Кант четко (резко) различает *единичные* чувственные созерцания и *общие* рассудочные понятия.

который делает записи книге (кантовский рассудок), и «другим мастером» — живописцем, «который вслед за писцом чертит в душе образы [είχονας] названного» [18, с. 42—43 (38e — 39c)] (кантовский фигурный синтез воображения).

Итак, единичный треугольник образуется в нашей душе путем его рисования. А как же образуется идея треугольника? Какие «действия» нашего сознания порождают эту идею? Ответ на этот вопрос содержится в кантовском учении о *схематизме*¹⁷, точнее, в его модификации за счет привлечения более позднего кантовского учения о *рефлексивной способности суждения* из «Критики способности суждения» [10, с. 52—56; с. 63—66; с. 100—106; с. 187—193]. Таковой является процедура *рефлексии*, которая позволяет изменять *направленность* сознания. Здесь она (рефлексия) выступает как процедура *рефлексивного переключения*, которая «переключает» внимание нашего сознания с *результата* рисования — единичной [геометрической] *фигуры* [треугольника] на [общий] *способ* его построения¹⁸, т. е. *алгоритм* рисования, который Кант эксплицирует термином «трансцендентальная *схема*» [8, с. 123]. В нашем случае построения треугольника это «*действие по конструированию понятия*» (это выражение из приведенного выше кантовского фрагмента!) состоит *приблизительно*¹⁹ в

¹⁷ На релевантность схематизма указывает здесь уже сама этимология греческого термина «σχῆμα», который, помимо значения «наглядный вид, образ», своим значением имеет также «математическая фигура», что напрямую отсылает нас к специфике математической деятельности как работе со схемами.

¹⁸ Как таковая эта процедура, явным образом отсутствующая у Канта в «Критике чистого разума», вводится нами, но весь контекст кантовской главы о схематизме рассудочных понятий в свете его более позднего учения о рефлексивной способности суждения неявно ее предполагает. Собственно, сутью этой процедуры является переключение с вопроса типа «Что (это нарисовано)?» на вопрос «Как (это что получается)?». Подробнее мы говорим об этом в [14].

¹⁹ По сути дела, никакая схема как действие не может быть абсолютно точно выражена дискурсивным образом (ведь схема — это нечто среднее между чувственным созерцанием и рассудочным по-

том, что мы совершаем двойной излом с замыканием при проведении прямой линии (для четырехугольника — тройной излом). А если мы попробуем обобщить алгоритм рисования данного конкретного треугольника, то окажется, что он применим к построению *любого* треугольника вообще, поскольку для него «многие определения, например величины сторон и углов, совершенно безразличны, [т. к. они не изменяют общее] понятие треугольника». Вот что Кант говорит в этой связи: «В действительности в основе наших чистых чувственных понятий [математических предметов. — С. К.] лежат не образы предметов, а схемы. Понятию о треугольнике вообще не соответствовал бы никакой образ треугольника. В самом деле, образ [например, остроугольный или тупоугольный прямоугольник] всегда ограничивался бы только частью объема этого понятия и никогда не достиг бы общности понятия, благодаря которой понятие приложимо ко всем треугольникам — прямоугольным, остроугольным и т. п. Схема треугольника не может существовать нигде, кроме как в мысли, и означает правило синтеза воображения в отношении чистых фигур в пространстве» [8, с. 125]²⁰.

То есть кантовская *схема* и есть «*общезначащее* созерцание» [8, с. 423], приложимое к целому классу единичных созерцаний, или искомая нами «идея»! Но это уже не *статичная идея*, полученная путем интуитивного прозрения (Платон, Декарт) или абстрагирования (Аристотель, Локк), а, скорее, платоновский *эйдос* как *принцип* порождения треугольника.

При этом кантовская *схема* является все же *созерцанием*, хотя и особого типа, поскольку выступает «посредником» между понятием и созерцанием. Попробуем уточнить ее статус.

нятием). Парафразируя Витгенштейна, скажем, что схема, скорее, не «сказывается», а «делается» (показывается). Например, мы не можем научить ребенка, *как* кататься на велосипеде по учебнику теоретической механики, а должны использовать для освоения этого навыка прагматическую максиму типа «делай как я, повторяй за мной!».

²⁰ Чуть ниже Кант определяет схему как «чувственное понятие предмета, находящееся в соответствии с категорией [рассудка]» [8, с. 128].

Для этого обратимся к кантовской концепции познавательного акта. Он представляет собой иерархию синтезов, каждый из которых является надстройкой над результатом предыдущего. Кантовский схематический синтез является надстройкой над фигурным синтезом воображения. Понятно, что фигурный синтез воображения есть *пространственный* синтез, т. е. оформление первичного ощущения (созерцания) с помощью априорной формы пространства. Соответственно, его результатом выступает некоторая (нарисованная) «фигура». Следующим действием сознания является рефлексивное переключение с *чтой*-ного на *ка́к*-овой момент акта рисования, в котором фиксируется способ («как») его осуществления, т. е. способ рисования этой фигуры. Если отвлечься от *содержания* этого акта, то искомая нами схема является *временным моментом* фигурного синтеза, точнее, временным оформлением пространственной фигуры. Специфика временного метасозерцания в том, что оно, в отличие от пространственных фигур, хотя и не является «картинкой», но вполне *представимо* (т. е. является созерцанием) как способ конструирования, который как бы вычитывается из построенных по нему фигур. По признакам общности схемы являются общими представлениями, т. е. схожи с понятиями, которые также ненаглядны, общи и применимы ко многим созерцаниям. Но это не понятия, поскольку схемы *непрозрачны* для рассудка: это нечто, что не выразимо до конца вербальными средствами. В точном смысле слова схемы — это *действия*, которые имеют не — понятийную природу, и именно поэтому Кант относит схемы к созерцаниям.

Символическое конструирование. Кантовский трансцендентализм позволил решить основные методологические проблемы математического знания эпохи Нового времени. Однако в посткантовскую эпоху происходит бурный рост математики, который сопровождается существенными изменениями в ее основаниях. Прежде всего, математика сближается с логикой, а современная математика представляет собой еди-

ный логико-математический комплекс. Это требует определенной модификации кантовской концепции, поскольку *логика* для Канта соотносится уже не с априорными формами чувственности пространства и времени, лежащими в основании математического знания, а с деятельностью рассудка, и поэтому должен измениться трансцендентальный статус математического «способа познания». Кроме этого, в математике присутствуют объекты типа декартовского *хилигона*, которые непредставимы с помощью наглядных психических образов, а по мере ее развития начинают использоваться еще более абстрактные объекты, которые уже *в принципе* не наглядны, причем удельный вес таких абстракций в математике постоянно возрастает. Введение и функционирование подобных абстрактов ставит перед трансцендентализмом новые вопросы. Во-первых, проблему конструирования этих понятий. Кантовский критерий состоит в соотнесении абстрактов рассудка с чувственными созерцаниями. Но какой тип созерцаний будет соответствовать не наглядным абстракциям высокого уровня? И можно ли сохранить кантовское понимание математики как деятельности по конструированию понятий? Во-вторых, это проблема генезиса и трансцендентального статуса этих абстрактов: насколько правомерно использование подобных рассудочных концептов (в математике) и как отличить (критерий?) «хорошие» понятия от спекулятивных фантазий, которым не место в серьезной науке?

Попробуем дать ответы на поставленные вопросы. Говоря в целом, можно сказать, что кантовский схематизм может быть применен к конструированию *не наглядных* математических объектов, если не трактовать акт конструирования слишком примитивно как соотнесение концептов с единичными эмпирическими созерцаниями (см. приведенную выше цитату, где Кант специально оговаривает это обстоятельство). Ведь *схема* как способ построения, например, хилигона вполне обозрима (выражается, например, конечной инструкцией о 999 изломах прямой линии) и принципиально не отличается от *схемы* треугольника. Вот что Кант пишет по сходному поводу:

«Если же я мыслю только число вообще (например, тысячу)..., то такое мышление есть скорее представление о методе, (или общем способе, т. е. схеме) каким представляют в одном образе множество..., чем сам этот образ, который в последнем случае, когда я мыслю тысячу, вряд ли могу обозреть и сравнить с понятием» [8, с. 124]. Тем самым Кант вполне последователен в отстаивании конструктивной установки в математической деятельности: в ней допустимы лишь такие концепты, для которых у нас имеется способ их построения. Специфика же **трансцендентального конструктивизма**, в отличие, например, от *эрлангенского конструктивизма* [20], состоит в том, что математические абстракты — поскольку они являются не-физическими идеальными объектами (например, *точки*) — должны подкрепляться не какими-либо реально-техническими процедурами их построения, например, с помощью циркуля и линейки (постулат эрлангенского конструктивизма), а *обосновываться* с помощью *мысленного способа* их построения, например, с помощью *мысленного эксперимента*. В качестве поясняющего примера можно указать на переход от *наивной теории множеств* Кантора к аксиоматической системе Цермело — Френкеля, в которой новые множества «строятся» при помощи *процедуры выбора* из соответствующей аксиомы. Причем, поскольку кантовские *схемы* по своей природе являются уже *общими представлениями*, можно говорить о целой иерархии схем разной степени общности, которые и будут соответствовать понятиям высокой (разной) степени абстрактности.

Однако не менее интересным для решения проблемы математических сверхабстракций представляется еще один кантовский подход. Анализируя математический способ познания, Кант в основном описывает *остенсивное конструирование* геометрических объектов, но вместе с тем, хотя и не столь подробно, рассматривает *символическое конструирование*, используемое в алгебраических конструкциях: «Математика конструирует не только величины (*quanta*), как это делается в геометрии, но и величину как таковую (*quantitas*), как это де-

лается в алгебре, совершенно отвлекающейся от свойств предмета, который должно мыслить согласно такому понятию величины. Она избирает себе при этом определенные обозначения для всех конструирований величин вообще (чисел), каковы сложение, вычитание, извлечение корня и т. д.; затем, обозначив общее понятие величин в их различных отношениях, она изображает в созерцании соответственно определенным общим правилам все операции, производящие и изменяющие величину, когда одна величина должна быть разделена другой, она соединяет их знаки по обозначающей форме деления и т. п. и таким образом с помощью символической конструкции, так же как геометрия с помощью остенсивной, или геометрической, конструкции (самых предметов) достигает того, чего дискурсивное познание посредством одних лишь понятий никогда не может достигнуть» [8, с.425].

В рамках обсуждаемой нами проблемы это означает, что абстрактно-формальная математическая деятельность (каковой является, в частности, алгебра) также имеет созерцательно-конструктивный характер, хотя формальные алгебраические абстракты соотносятся уже с символическими *квазисозерцаниями*. Более важным при этом представляется то, что суть алгебраических конструкций состоит не столько в использовании «языка *x*-ов и *y*-ов» (хотя переход на метаязык *переменных* является важнейшей конституирующей чертой алгебры), сколько в возможности алгебраического языка «показывать» (выражать) *операции*, производимые с математическими объектами. А это означает, что в основе символического конструирования лежит несколько более сложная разновидность кантовского схематизма, которая позволяет конструировать рассудочные абстракции высокого уровня. Вернемся к примеру с хилигионом. В случае его *символического* представления с помощью более простого представления того же типа, например треугольника в качестве символа многоугольника (ведь три угла принципиально ничем не отличаются от 1000 углов), мы можем говорить не только о *понимании* хи-

лигиона, но и его квазисозерцании, что вполне вписывается в кантовскую концепцию математической деятельности.

Отличается *остенсивное* конструирование принципиально от *символического*? При остенсивном конструировании *действия* схем явно не «сказываются», а лишь «показываются», хотя потом и эксплицируются с помощью рефлексивных актов. В случае символического конструирования *действия* явным образом выражаются в языке, который представляет собой символизм двоякого рода. С одной стороны, алгебраический «язык *x*-ов и *y*-ов» (переменных) позволяет представлять конкретные числа: с другой стороны, это язык для явного (с помощью особых технических знаков) представления «действий» с переменными и числами. Причем понятно, что последнее не является прерогативой лишь алгебры, а относится и к другим разделам современной математики (логики): никакой математический язык без специальных знаков для выражения операций не возможен²¹.

В дополнении к сказанному можно говорить и о промежуточных типах математического конструирования как определенном сочетании остенсивных и символических конструкций. В качестве примера укажем на (1) технику *круговых диаграмм* Эйлера, широко используемых в логике, с помощью которых как геометрических созерцаний мы можем представ-

²¹ Описывая специфику *математики* как «познания посредством конструирования понятий», Кант противопоставляет ее *философии* как «познанию посредством понятий» [8, с.423]. Чуть ниже Кант говорит о принципиальном различии методов этих познавательных практик, подчеркивая недопустимость взаимного перенесения их методов: «геометр, пользуясь своим методом, может строить в философии лишь карточные домики, а философ со своим методом может породить в математике только болтовню» [8, с.430]. Противопоставление философии и математики соответствуют различию *декларативных* и *процедурных* языков, задача первых — описывать *ситуацию*, а вторых — задавать *способы действий*. Это во многом предопределяет специфику стиля рассуждений в математике.

лять отношения между понятиями; (2) *секвенциальные деревья* или (3) *субординантную структуру натуральных выводов*, которые являются скорее не записью производимых операций, а наглядным выражением результатов их осуществления.

Заключение

Кантовское понимание математики как *дискурсивно-интуитивной деятельности* вполне соответствует основным тенденциям развития современной математики и выступает богатым источником концептуальных и методологических эвристик.

Одной из них является представление о математике как двухуровневой системе знания, включающей в себя как формально-символическое оперирование на *синтаксическом* уровне, так и соотнесение этих дискурсивных представлений с содержательными *семантическими* моделями: любая формальная конструкция должна опираться на соответствующее «созерцание», т. е. иметь выполняющую ее (семантическую) *модель*. Тем самым кантовский трансцендентализм предвосхитил развитие *теории моделей*, которая в настоящее время является необходимым компонентом любой математической теории.

Не менее значимым является и то, что кантовская концепция математики лежит в фундаменте основных программ обоснования математики XX в.: *логицизма, формализма, интуиционизма, конструктивизма*. И хотя каждая из них идентифицирует себя как альтернативная по отношению к другим, но можно показать, что все они базируются на кантовском подходе (подробнее этот тезис мы аргументируем в [15, 19]). Отстаиваемая Кантом необходимость опоры любых математических рассуждений на созерцания послужила основой для развития *математического интуиционизма*. Кантовская концепция схематизма, по сути, предвосхитила *математический конструктивизм*, который признает в качестве полноценных математических объектов, какими бы абстрактными они ни были, лишь те, которые могут быть *сконструированы*. Опи-

санный же Кантом механизм *символического конструирования* лежит в основании *логицизма* и *формализма*.

Очень перспективной представляется концепция *трансцендентального конструктивизма*, которая постулирует необходимость соотнесения (проверки) вводимых математических абстракций с нашими познавательными действиями. Это позволит предотвратить проникновение в математику красивых метафор, которыми так богат наш язык, но которые нередко выступают источником математических парадоксов и противоречий²².

Список литературы

1. Беркли Дж. Трактат о принципах человеческого знания. М.: Наука, 1978.
2. Брюшинкин В. Н. Взаимодействие формальной и трансцендентальной логики // Кантовский сборник. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2006. Вып. 26. С. 148—167.
3. Бурбаки Н. Архитектура математики // Его же. Очерки по истории математики. М.: Изд-во ин. лит., 1963.
4. Ван Хао. Процесс и существование в математике // Математическая логика и ее применения. М.: Мир, 1965.
5. Вейль Г. Топология и абстрактная алгебра как два способа понимания в математики // Его же. Математическое мышление. М.: Наука, 1989.
6. Есенин-Вольпин А. С. Об антитрадиционной (ультраинтуиционистской) программе оснований математики и естественнонаучном мышлении // Вопросы семиотики. 1993. Вып. 33. С. 13—68.
7. Есенин-Вольпин А. С. Формулы или формулоиды? // XI Международная конференция: логика, методологии и философии науки. М.; Обнинск, 1995. Т. 1. С. 29—33.

²² Использование неконструктивных объектов является одним из источников возникающих в математике парадоксов, хотя иногда использование математических метафор выглядит вполне безобидно. Примером такой метафоры является, в частности, выражение *две прямые пересекаются*, поскольку автору путем опроса математиков не удалось найти приемлемых *мысленных действий*, реализующих эту операцию с *прямыми как таковыми*, а не их физическими аналогами: например, на *плоскости* одна прямая может лишь *разрезать* другую прямую (при этом вторая прямая «исчезает»), а не *перепрыгнуть* ее и т. д.

8. *Кант И.* Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994 [Серия «Философское наследие»].
9. *Кант И.* Пролегомены ко всякой будущей метафизике, могущей появиться как наука // *Его же.* Соч.: В 6 т. Т. 4 (1).
10. *Кант И.* Критика способности суждения. М.: Искусство, 1994.
11. *Кант И.* Из рукописного наследия: материалы к «Критике чистого разума», *Opus postumum*. М.: Прогресс-Традиция, 2000.
12. *Катречко С. Л.* К вопросу об «априорности» математического знания // *Математика и опыт.* М.: Изд-во МГУ, 2003.
13. *Катречко С. Л.* Расселовский парадокс брадобрея и диалектика Платона — Аристотеля // *Современная логика: Проблемы теории, истории и применения в науке: Материалы VII Международной конференции научной конференции.* 20—22 июня 2002 г. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002. С. 239—242.
14. *Катречко С. Л.* Трансцендентальная (кантовская) модель сознания как новая парадигма «искусственного разума» // *Искусственный интеллект: междисциплинарный подход.* М.: ИИнтелЛЛ, 2006. С. 276—289.
15. *Катречко С. Л.* Трансцендентальная философия математики // *Философия математики: актуальные проблемы: Материалы Международной научной конференции.* 15—16 июня 2007. М.: Изд. Савин С. А., 2007. С. 31—34.
16. *Лосев А. Ф.* История античной эстетики: Софисты. Сократ. Платон. М.: Искусство, 1969.
17. *Лосев А. Ф.* История античной эстетики: Аристотель и поздняя классика. М.: Искусство, 1975.
18. *Платон Филеб* // *Его же.* Собр. соч.: В 4 т. М.: Мысль, 1994. Т. 3.
19. *Талкер С. Л., Катречко С. Л.* Кантовы основания программ обоснования математики // *Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции.* 15—16 июня 2007. М.: Изд. Савин С. А., 2007. С. 69—72.
20. *Lorenzen P.* Konstruktive Wissenschaftstheorie. Frankfurt, 1974.

