Пусть ℓ -ненулевая (т.е.не лежащая в L°) прямая связки $\{P^\circ\}$.Характеристическая гомография H_ℓ на ней индуцируется теми касательными коллинеациями $K(P_\gamma)$, для которых $K(P_\gamma)(H_\ell \cap \mathcal{M}) \in \pi^\circ$.В точке типа U_3 таким свойством для любой ℓ обладает коллинеация,для которой $K(P_\gamma)(\mathcal{M}) = \pi^\circ$.Таким образом,справедливо

П р е д л о ж е н и е 5. В точке типа U_3 существует касательная коллинеация $K(P_\gamma)$,которая на всех ненулевых прямых связки $\{P^\circ\}$ индуцирует характеристические гомографии.

5.В случае $n=1$ из условия I определения I следуют условия 2 и 3 .Отсюда вытекает следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 6. При $n=1$ для планарной точки P° многообразия W_{P° выполняется: I/Фокальное многообразие $\mathfrak{U}(H)$ является $(n-2)$-плоскостью,общей для всех нормалей I-го рода H ;2/Замыкание $\overline{\mathcal{M}}$ множества $\mathcal{M}$ главных точек является гиперплоскостью;3/Существует коллинеация $K(P_\gamma)$,индуцирующая характеристические гомографии на всех ненулевых прямых связки $\{P^\circ\}$.

З а м е ч а н и е.Можно показать,что для рассматриваемого случая все 4 условия:I ,2 ,3 и планарность точки P°-эквивалентны.

Список литературы

I.Л а п т е в Г.Ф.,О с т и а н у Н.М.Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I.-Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ АН СССР,1971, 235-242.

2.А н д р е е в Б.А.О распределении линейных элементов,порожденных отображением $f: P_m \to A_n$ $(m>n)$.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.10. Калининград,1979,5-9.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.11 1980

О.В.Белякова,Е.А.Хляпова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНГРУЭНЦИЙ ОСНАЩЕННЫХ КОНИК В A_3.

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются цилиндрические конгруэнции,т.е. конгруэнции оснащенных коник $F=\{F_1, F_2\}$,при условии,что точка F_2 описывает цилиндрическую поверхность,которой принадлежат все центральные коники F_1 конгруэнции (F_1) .Основное внимание уделяется изучению конгруэнций K ,являющихся подклассом цилиндрических конгруэнций.Введены ассоциированные с F квадрики и коники,описывающие конгруэнции,найдены и геометрически охарактеризованы их фокальные многообразия.

§ I. Цилиндрические конгруэнции

Отнесем цилиндрическую конгруэнцию к подвижному реперу $R=\{A, \overline{e}_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$,начало A которого совмещено с центром коники F_1,конец E_3 вектора $\overline{e}_3$ - с точкой F_2, концы E_i $(i,j,k=1,2)$ векторов $\overline{e}_i$ расположены на конике F_1 таким образом,что AE_1 и AE_2 являются сопряженными диаметрами коники F_1, и AE_1 параллельна касательной плоскости поверхности (F_2) в точке F_2 .

Уравнения коники F_1 относительно выбранного репера R имеют вид:

$$(x^1)^2+(x^2)^2-1=0\ , \quad x^3=0\ . \tag{1}$$

Так как точка $F_2 \equiv E_3$ описывает цилиндрическую поверхность Q ,которой принадлежат все коники F_1 конгруэнции (F_1),то уравнение квадрики Q запишется в виде:

$$Q \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + 2x^2x^3 + (x^3)^2 - 1 = 0 \ . \qquad (2)$$

Из условия инвариантности квадрики Q получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\omega^1 = \omega_1^1 = \omega_3^3 = \omega_3^2 = 0, \\ &\omega_2^2 + \omega_2^3 = 0, \\ &\omega_2^1 + 2\omega_1^2 + 2\omega_1^3 = 0, \\ &\omega_3^1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 = 0, \\ &\omega^3 = -\omega^2, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\omega^\alpha, \omega_\alpha^\beta$ -компоненты деривационных формул

$$d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha \ , \quad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta$$

репера R ,удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha \ , \quad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \ .$$

Система уравнений Пфаффа цилиндрической конгруэнции состоит из уравнений (3) и уравнений:

$$\omega^2 = \Gamma^{2i}\omega_i \ , \quad \omega_1^2 = \Gamma_1^{2i}\omega_i \ ,$$

где $\omega_i = \omega_i^3 \ , \quad \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0 \ .$ (4)

Анализируя эту систему,убеждаемся,что цилиндрические конгруэнции существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

§ 2. Конгруэнции K

О п р е д е л е н и е. Цилиндрическая конгруэнция называется конгруэнцией K ,если индикатриса вектора $\bar{e}_1$ вырождается в линию с касательной,параллельной вектору $\bar{e}_3$.

Аналитически условия,выделяющие конгруэнции K из цилиндрических конгруэнций, выражаются следующим образом:

$$\Gamma_1^{21} = \Gamma_1^{22} = 0 \ . \qquad (5)$$

Учитывая (5) в (3) и (4),запишем систему уравнений Пфаффа конгруэнции K в виде:

$$\begin{aligned} &\omega^1 = \omega_1^1 = \omega_1^2 = \omega_3^2 = \omega_3^3 = 0, \\ &\omega_2^2 = -\omega_2 \ ; \quad \omega^3 = -\omega^2 \ ; \quad \omega_2^1 = -2\omega_1 \ , \quad \omega_3^1 = -\omega_1 \ , \\ &\omega^2 = \Gamma^{2i}\omega_i \ . \end{aligned} \qquad (6)$$

Анализируя систему уравнений (6),убеждаемся,что конгруэнции K существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а I. Конгруэнции K обладают следующими свойствами: I/торсы прямолинейных конгруэнций,описанных ребрами репера R ,соответствуют и высекают на фокальных поверхностях сеть линий,одним из семейств которой является семейство координатных линий; 2/несобственные точки лучей $(A\bar{e}_1)$,$(A\bar{e}_3)$ конгруэнций $(A\bar{e}_1)$,$(A\bar{e}_3)$ являются фокусами этих лучей; 3/плоскости $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_3)$ образуют пучок параллельных плоскостей; 4/характеристическая точка B плоскости $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ конгруэнции $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ инцидентна прямой,параллельной $\bar{e}_1$ и проходящей через фокус M луча $(A\bar{e}_2)$ конгруэнции $(A\bar{e}_2)$,отличный от точки A .

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Уравнение торсов прямолинейных конгруэнций $(A\bar{e}_\alpha)$ имеет вид:

$$\omega^2\omega_1 = 0 \ .$$

2/Координаты $(x_1, 0, 0)$, $(0, 0, x_3)$ фокусов лучей $(A\bar{e}_1)$ и $(A\bar{e}_3)$ определяются соответственно из уравнений

$$\begin{cases} \omega^2 = 0, \\ x_1\omega_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \omega^2 = 0, \\ x_3\omega_1 = 0. \end{cases}$$

Переходя в этих уравнениях к однородным координатам по формулам $x_1 = \dfrac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0}$, $x_3 = \dfrac{\bar{x}_3}{\bar{x}_0}$ получим:

$$\begin{cases} \bar{x}^0 \omega^2 = 0, \\ \bar{x}^1 \omega_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \bar{x}^0 \omega^2 = 0, \\ \bar{x}^3 \omega_1 = 0. \end{cases}$$

Откуда имеем $\bar{x}^0 = 0$, что и доказывает свойство 2.

3/Плоскости $(A\bar{e}_1\bar{e}_3)$ описывают однопараметрическое семейство, причем характеристикой плоскости $(A\bar{e}_1\bar{e}_3)$ этого семейства является ее несобственная прямая.

4/Характеристическая точка B плоскости $(A\bar{e}_1\bar{e}_2)$ конгруэнции $(A\bar{e}_1\bar{e}_2)$ и фокус $M \neq A$ луча $(A\bar{e}_2)$ конгруэнции $(A\bar{e}_2)$ определяются формулами:

$$\bar{B} = \bar{A} + \Gamma^{21}\bar{e}_1 + \Gamma^{22}\bar{e}_2, \qquad \bar{M} = \bar{A} + \Gamma^{22}\bar{e}_2, \tag{7}$$

из которых непосредственно вытекает свойство 4 теоремы 1.

§.3. Ассоциированные квадрики и коники

Введем следующие обозначения: буквой Φ_1 обозначим цилиндр

$$\Phi_1 \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0 \tag{8}$$

с образующей параллельной вектору $\bar{e}_3$ и направляющей коникой F_1 ; буквой Φ_2 -квадрику

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \tag{9}$$

проходящую через конику F_1 , точку F_2 , относительно которой вектор $\bar{e}_3$ сопряжен плоскости $(A\bar{e}_1\bar{e}_2)$.

Сечения квадрик Φ_1 и Φ_2 плоскостью, проходящей через точку A параллельно касательной плоскости поверхности (F_2) в точке F_2 , дают коники Φ_1' и Φ', определяемые соответственно уравнениями:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 + x^2 = 0; \tag{10}$$

$$(x^1)^2 + 2(x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 + x^2 = 0 \tag{11}$$

Т е о р е м а 2. Образующие цилиндра Φ_1 конгруэнции (Φ_1), проходящие через точки $\bar{E}_1 = \bar{A} + \bar{e}_1$ и $\bar{E}_1' = \bar{A} - \bar{e}_1$, являются его фокальными многообразиями, а сами точки $\bar{E}_1, \bar{E}_1'$ являются фокальными для квадрики Φ_2 конгруэнции (Φ_2)[1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Координаты фокальных точек цилиндра Φ_1 конгруэнции (Φ_1) и квадрики Φ_2 конгруэнции (Φ_2) определяются соответственно из уравнений:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^2(1 - \Gamma^{21}) = 0, \quad x^2(x^2 - \Gamma^{22}) = 0;$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0,$$
$$4x^1x^2 + x^3 - 2\Gamma^{21}x^2 - 2x^1x^3 + 2\Gamma^{21}x^3 = 0,$$
$$2(x^2)^2 - 2\Gamma^{22}x^2 - 2x^2x^3 + 2\Gamma^{22}x^3 = 0,$$

откуда непосредственно вытекают утверждения теоремы 2.

Т е о р е м а 3. Фокальными точками коник Φ_1' и Φ_2' конгруэнций (Φ_1') и (Φ_2') являются точки их пересечения с плоскостями $(A\bar{e}_1\bar{e}_3)$, $(A\bar{e}_2\bar{e}_3)$, $(M\bar{e}_1\bar{e}_3)$, где M задана формулой (7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Координаты фокальных точек коник Φ_1' и Φ_2' определяются соответственно из уравнений (10),(11) и уравнения

$$x^1x^2(x^2 - \Gamma^{22}) = 0.$$

Следовательно, фокальными точками коник Φ_1' и Φ_2' являются точки их пересечения с плоскостями $(A\bar{e}_2\bar{e}_3)$, $(A\bar{e}_1\bar{e}_3)$, $(M\bar{e}_1\bar{e}_3)$, задаваемыми соответственно уравнениями:

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0, \quad x^2 = \Gamma^{22}$$

Таким образом теорема 3 доказана.

Список литературы

1. М а х о р к и н В.В. Некоторые типы многообразий гиперквадрик.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.50-59.