УДК 514.76

С. В. Галаев
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия
sgalaev@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-1129-7159
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-7

К геометрии субримановых многообразий, канонической четверть-симметрической связностью

В настоящей статье под субримановым многообразием контактного типа понимается риманово многообразие, оснащенное регулярным распределением коразмерности один и ортогональным этому распределению единичным векторным полем, называемым структурным векторным полем. На субримановом многообразии контактного типа определяется четверть-симметрическая связность, ассоциируемая с эндоморфизмом, сохраняющим распределение субриманова многообразия. Доказывается, что в случае метричности изучаемой связности ассоциируемый с ней эндоморфизм определен однозначно. Находится строение ассоциируемого эндоморфизма. В случае, когда структурное векторное поле представляет собой поле инфинитезимальных изометрий, четверть-симметрическая связность получает название канонической N-связности. Находится выражение тензора кривизны канонической N-связности через тензор кривизны Римана. Исследуются свойства тензора кривизны Схоутена, обеспечивающие, в частности, необходимые симметрии тензора кривизны N-связности для корректного определения ее секционной кривизны. Найдена связь секционной кривизны канонической N-связности и секционной кривизны связ-

Поступила в редакцию 02.04.2023 г.

ности Леви-Чивиты. Находятся необходимые и достаточные условия для совпадения секционной кривизны N-связности и секционной кривизны связности Леви-Чивиты.

Ключевые слова: субримановы многообразия контактного типа, четверть-симметрическая связность, секционная кривизна, тензор Схоутена

Введение

Изучению почти контактных метрических многообразий, оснащенных четверть-симметрической и, в частности, полуметрической связностью, посвящено большое количество работ [8—10; 14; 15]. Э. Картан [11] первым рассмотрел линейную метрическую связность с кручением вместо связности Леви-Чивиты. Среди метрических связностей с кручением наибольшее внимание ученых привлекает полусимметрическая связность, систематическое исследование которой проведено К. Яно в работе [14]. Четверть-симметрическая связность определена в 1975 г. С. Голабом [13]. Большое количество работ посвящено как метрическим, так и не метрическим связностям с кручением, заданным на многообразиях с почти контактной метрической структурой.

В настоящей работе на субримановом многообразии рассматривается четверть-симметрическая связность D_X, ассоциируемая с тройкой (∇, C, S), где ∇ — внутренняя метрическая связность, а C, S — эндоморфизмы распределения D. Причем эндоморфизм C задается равенствами

$$C(X,Y) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}g)(X,Y),\ g(CX,Y) = C(X,Y),$$

а S — произвольный эндоморфизм. Одной из задач настоящей статьи является определение такого эндоморфизма S, для которого D_X — метрическая связность. Если при этом $(L_{\vec{\xi}}g)(X,Y) = 0$, то метрическая четверть-симметрическая связность D_X получает название канонической N-связности. Решается задача сравнения секционной кривизны канонической N-связности и секционной кривизны связности Леви-Чивиты. Находятся необходимые и достаточные условия для совпадения секционной кривизны N-связности и секционной кривизны связности Леви-Чивиты.

Основные результаты

Пусть M — риманово многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$ с заданной на нем субримановой структурой $(\vec{\xi}, \eta, g, D)$ контактного типа, где g — метрический тензор, заданный на многообразии M, η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$. Потребуем, чтобы $\omega(\vec{\xi},\cdot) = d\eta(\vec{\xi},\cdot) = 0$, $rk(\omega) \geq 2$. Будем называть в дальнейшем M субримановым многообразием.

Внутренней линейной связностью ∇ [3] на субримановом многообразии называется отображение $\nabla\colon \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1 X + f_2 Y} = f_1 \nabla_X + f_2 \nabla_Y$,

2) $\nabla_X f Y = (Xf)Y + f \nabla_X Y$,

3) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

где Γ(D) — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

На протяжении всей статьи мы активно используем адаптированные координаты. Карту $k(x^i)$ $(i, j, k = 1, \dots, n;\ a, b, c = 1, \dots, 2m)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_{\mathrm{n}} = \vec{\xi}$. Пусть $P\colon TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, и $k(x^i)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы в каждой точке и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D = span(\vec{e}_a)$.

Адаптированные координаты играют роль «голономных» координат для неинволютивного распределения. Имеет место равенство $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}$. Отсюда, в частности, вытекает важное для дальнейшего утверждение: условие $d\eta(\vec{\xi},\cdot) = 0$ эквивалентно справедливости равенства $\partial_n \Gamma_a^n = 0$.

Кручением и кривизной внутренней связности назовем, соответственно, допустимые тензорные поля:

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - P[X,Y],$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]} Z - P[Q[X,Y],Z],$$

где $Q = I - P$,$X,Y,Z \in \Gamma(D)$.

Тензор $R(X,Y)Z$ носит название тензора кривизны Схоутена субриманова многообразия. Компоненты тензора кривизны Схоутена в адаптированных координатах определяются равенством

$$R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e.$$

Имеет место

Предложение 1. *На субримановом многообразии существует единственная связность ∇ с нулевым кручением, такая, что*

$$\nabla_X g(Y,Z) = 0, X,Y,Z \in \Gamma(D).$$

Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Коэффициенты внутренней метрической связности находятся по формулам

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Далее пусть $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивиты.

Предложение 2. *Коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ связности Леви-Чивиты $\tilde{\nabla}$субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \qquad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a + \psi^b_a,$$

$$\tilde{\Gamma}^n_{na} = -\partial_n \Gamma^n_a, \qquad \tilde{\Gamma}^a_{nn} = g^{ab}\partial_n \Gamma^n_b,$$

где

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}),$$

$$\psi^b_a = g^{bc}\omega_{ac},$$

$$C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab},\ C^b_a = g^{bc}C_{ac}.$$

Здесь эндоморфизм $\psi: TM \to TM$ определяется из равенства $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$. Выполняются также следующие соотношения: $C(X, Y) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}} g)(X, Y)$,$g(CX, Y) = C(X, Y)$. Коэффициенты $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ примут более простой вид, если потребовать, чтобы $d\eta(\vec{\xi}, X) = 0$. В этом случае

$$\tilde{\Gamma}^n_{na} = -\partial_n \Gamma^n_a = 0 \quad \text{и} \quad \tilde{\Gamma}^a_{nn} = g^{ab}\partial_n \Gamma^n_b = 0.$$

Внутренняя связность обеспечивает параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. В то же время для решения ряда проблем возникает необходимость расширения внутренней связности до связности на всем многообразии. Иногда достаточно промежуточной конструкции — связности в векторном расслоении (M, π, D). Существуют разные способы продолжения внутренней связности. В ряде статей [1; 2; 4—6] обсуждается так называемая N-связность ∇^N. На почти субримановом многообразии M N-связность ∇^N определяемую парой (∇, N), где ∇ — внутренняя метрическая связность, $N: TM \to TM$ — эндоморфизм касательного расслоения многообразия M такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. В настоящей статье мы выделяем четверть-симметрические N-связности.

Определим четверть-симметрическую связность D_X на субримановом многообразии с помощью следующего равенства:

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + C(X, Y)\vec{\xi} - \eta(X)\psi Y - \eta(Y)(C + \psi - S)X.$$

Имеет место

Предложение 3. *Ненулевые коэффициенты* G_{ij}^{k} *связности* D_X *субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$G_{ab}^{c} = \tilde{\Gamma}_{ab}^{c},\ G_{ab}^{n} = \omega_{ba},\ G_{an}^{b} = S_{a}^{b},\ G_{na}^{b} = C_{a}^{b}.$$

Из определения четверть-симметрической связности D_X следует, что участвующий в ее определении эндоморфизм S определен произвольным образом. Сформулированная ниже теорема утверждает, что эндоморфизм S будет определен однозначно, если потребовать от связности D_X свойство метричности.

Теорема 1. *Заданная на субримановом многообразии четверть-симметрическая связность* D_X *будет метрической тогда и только тогда, когда* $S = \psi$.

Используя предложение 1, непосредственно убеждаемся в том, что $D_a g_{bc} = 0$ и $D_n g_{bc} = 0$. Найдем условия, при которых $D_a g_{nb} = 0$. Имеем:

$$D_a g_{nb} = -G_{an}^{c} g_{bc} - G_{ab}^{n} = -S_{a}^{c} g_{bc} - \omega_{ba} = 0.$$

Отсюда и из равенства $\psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac}$ следует, что теорема справедлива.

Из доказанной теоремы следует, что связность, определяемая посредством следующего равенства:

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + C(X,Y)\vec{\xi} - \eta(X)\psi Y - \eta(Y)CX,$$

является метрической четверть-симметрической связностью.

К введению четверть-симметрической связность D_X можно подойти следующим образом.

Теорема 2. *Пусть на субримановом многообразии* M *определена пара* (∇, N), *где* ∇ *— внутренняя метрическая связность,* $N: TM \to TM$ *— эндоморфизм касательного расслоения* *многообразия M такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. Тогда на многообразии M существует, причем единственная, связность D_X такая, что:*

1) $D_X\vec{\xi} = NX$,

2) $(D_X\eta)(Y) = \omega(X, Y)$,

3) $S(X, Y) = \eta(Y)NX - \eta(X)NY$,

4) $P(D_XY) = \nabla_XY$.

Здесь $S(X, Y)$ — тензор кручения связности D_X. В последнем равенстве $X, Y \in \Gamma(D)$, во всех остальных случаях $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Доказательство. Предположим, что связность D_X существует, найдем ее компоненты G_{ij}^k в адаптированных координатах. После некоторых вычислений получаем следующие ненулевые компоненты:

$$G_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a, \quad G_{bc}^n = \omega_{cb}, \quad G_{bn}^a = N_b^a.$$

Обратным образом можно убедиться в том, что связность с обозначенными выше компонентами удовлетворяет требованиям, предъявляемым к связности D_X.

Легко убедиться в том, что четверть-симметрическая N-связность выражается через связность Леви-Чивиты следующим образом:

$$D_XY = \tilde{\nabla}_XY + C(X, Y)\vec{\xi} - \eta(Y)(C + \psi - N)X - \eta(X)(C + \psi)Y.$$

Метрическую четверть-симметрическую N-связность, удовлетворяющую требованиям теоремы 2, будем называть канонической связностью, и предполагать, что до конца статьи выполняется условие $\left(L_{\vec{\xi}}g\right)(X, Y) = 0$. Если D_X — каноническая связность, то

$$D_XY = \tilde{\nabla}_XY - \eta(X)\psi Y.$$

В работе П. Н. Клепикова, Е. Д. Родионова и О. П. Хромовой «О секционной кривизне связностей с векторным кручением» [7] решается задача о связи секционной кривизны полусимметрической связности и секционной кривизны связности Леви-Чивиты. Авторами построена математическая модель, позволяющая вычислять секционную кривизну метрической связности с векторным кручением через секционную кривизну связности Леви-Чивиты в случае локально однородных (псевдо)римановых многообразий.

В своем исследовании мы рассматриваем схожие задачи применительно к субримановым многообразиям с четверть-симметрической связностью.

Предложение 4. *Пусть $\tilde{R}(X,Y)Z$ и $K(X,Y)Z$ — тензоры кривизны связностей $\tilde{\nabla}_X Y$ и $D_X Y$ соответственно. Тогда выполняются следующие соотношения:*

$$\tilde{R}(X,Y,Z,U) = K(X,Y,Z,U) + 2\omega(X,Y)\omega(Z,U),$$
$$X,Y,Z,U \in \Gamma(D);$$
$$\tilde{R}(X,Y)Z = K(X,Y)Z + 2\omega(X,Y)\psi Z,\ \ X,Y,Z \in \Gamma(D).$$

Известно, что в адаптированных координатах $\left(L_{\vec{\xi}}g\right)_{ab} = \partial_n g_{ab}$, $(L_{\vec{\xi}}g)_{an} = 0$. Таким образом, до конца статьи мы полагаем, что $\partial_n g_{ab} = 0$.

Покажем, что при сделанных предположениях тензор кривизны Схоутена обладает теми же свойствами симметрии, что и тензор кривизны Римана, позволяющими применить к тензору Схоутена процедуру разложения на неприводимые компоненты. Как известно, тензор кривизны Схоутена

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]}Z - P[Q[X,Y],Z],$$
$$X,Y,Z \in \Gamma(D)$$

в адаптированных координатах имеет вид

$$R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a|e|}\Gamma^e_{b]c}.$$

Условие $\partial_n g_{ab} = 0$ влечет равенство $\partial_n \Gamma^a_{bc} = 0$. В этом случае

$$R^d_{abc} = 2\partial_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a|e|}\Gamma^e_{b]c}.$$

Тензор кривизны Схоутена возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных:

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]}v^c = R^c_{abe}v^e + 4\omega_{ba}\partial_n v^c.$$

Как мы видим, координатное представление тензора Схоутена идентично координатному представлению тензора кривизны Римана. Это позволяет быть уверенным в том, что к тензору Схоутена применима теорема о разложении тензора кривизны на неприводимые компоненты. Тем не менее сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Тензор кривизны $R(X,Y)Z$ Схоутена удовлетворяет следующим тождествам:*

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z,$$

$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0,$$

$$g(R(X,Y)Z,U) = -g(R(X,Y)U,Z),$$

$$g(R(X,Y)Z,U) = g(R(Z,U)X,Y).$$

Доказательство. Из условия $d\eta(\vec{\xi},\cdot) = 0$ следует, что для доказательства указанных тождеств можно ограничиться такими векторными полями $X, Y, Z \in \Gamma(D)$, скобки Ли которых принадлежат распределению $D^\perp$. Будем полагать, что $X = \vec{e}_a$, $Y = \vec{e}_b$, $Z = \vec{e}_c$.

Для таких полей будем иметь

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z, \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = 0.$$

В этом случае первые два тождества выполняются очевидным образом, четвертое тождество является алгебраическим следствием первых трех. Докажем третье тождество, которое имеет место тогда и только тогда, когда

$$g(R(X,Y)Z,Z) = 0.$$

Из равенства

$$Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$$

следует, что

$$Xg(\nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) = 0.$$

Используя равенство

$$g(\nabla_Y Z, Z) = \frac{1}{2} Yg(Z,Z),$$

получаем

$$g(R(X,Y)Z,Z) = g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) =$$
$$= \frac{1}{2}(YX - XY)g(Z,Z) = \omega_{ab}\,\partial_{\mathrm{n}} g(Z,Z) = 0.$$

Третье тождество доказано. Тем самым теорема доказана.

Теорема 3 может быть использована для доказательства того, что, как и в случае тензора кривизны Римана, тензор кривизны Схоутена распадается на три части, соответствующие скалярной кривизне, бесследовой части тензора Риччи — Схоутена и тензору кривизны Вейля (при $2m \geq 4$).

Из теоремы 3 и равенства

$$\tilde{R}(X,Y,Z,U) = K(X,Y,Z,U) + 2\omega(X,Y)\omega(Z,U),$$
$$X,Y,Z,U \in \Gamma(D),$$

следует справедливость предложения 5.

Предложение 5. *Тензор кривизны $K(X,Y)Z$ удовлетворяет следующим тождествам:*

$$K(X,Y)Z = -K(Y,X)Z,$$
$$K(X,Y,Z,U) = -K(X,Y,U,Z),$$
$$K(X,Y,Z,U) = K(Z,U,X,Y),\ X,Y,Z,U \in \Gamma(D).$$

Определим на многообразии M секционную кривизну относительно канонической связности в направлении линейно независимых векторов $X,Y \in \Gamma(D)$:

$$K(X,Y) = \frac{K(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - (g(X,Y))^2}.$$

Сравним компоненты тензоров $\tilde{R}(X,Y)Z$ и $K(X,Y)Z$ в адаптированных координатах. Имеем:

$$\tilde{R}^d_{abc} = K^d_{abc} + 2\omega_{ab}\psi^d_c = R^d_{abc} + 2\omega_{ab}\psi^d_c,$$
$$\tilde{R}^n_{abc} = K^n_{abc} = \nabla_a\omega_{cb} - \nabla_b\omega_{ca},$$
$$\tilde{R}^a_{ncb} = K^a_{ncb} = -\nabla_c\psi^a_b.$$

Используя полученные соотношения, получаем равенство

$$\tilde{R}_{ab} = K_{ab} + \frac{2\omega^2_{ab}}{g_{aa}g_{bb} - g^2_{ab}}.$$

Теорема 4. *Секционные кривизны канонической связности и связности Леви-Чивиты в направлении линейно независимых векторов $X,Y \in \Gamma(D)$ равны тогда и только тогда, когда распределение D инволютивно.*

Список литературы

1. *Букушева А.В.* О геометрии многообразий Кенмоцу с N-связностью // ДГМФ. 2019. Вып. 50. С. 48—60.

2. *Букушева А.В.* Неголономные многообразия Кенмоцу, оснащенные обобщенной связностью Танаки — Вебстера // ДГМФ. 2021. №52. С. 42—51.

3. *Галаев С.В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, №3. С. 263—272.

4. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, №3. С. 258—263.

5. *Галаев С.В.* Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, №3. С. 53—63.

6. *Галаев С.В., Гохман А.В.* Почти симплектические связности на неголономном многообразии // Математика. Механика. 2001. №3. С. 28—31.

7. *Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П.* О секционной кривизне связностей с векторным кручением // Изв. вузов. Матем. 2020. №6. С. 86—92.

8. *Agricola I., Kraus M.* Manifolds with vectorial torsion // Differential Geometry and its Applications. 2016. Vol. 46. P. 130—146.

9. *Barua B., Ray A. Kr.* Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. Pure App. Math. 1985. Vol. 16, iss. 7. P. 736—740.

10. *Biswas S. C., De U. C.* Quarter-symmetric metric connection in an SP-Sasakian manifold // Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1. 1997. Vol. 46. P. 49—56.

11. *Cartan E.* Sur les varieties a connexion affine et la theorie de la relative generalisee. Part II // Ann. Ec. Norm. 1925. Vol. 42. P. 17—88.

12. *Galaev S. V.* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 2015. Vol. 31, №1. P. 35—46.

13. *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections // Tensor. New series. 1975. Vol. 29. P. 249—254.

14. *Yano K.* On semi-symmetric metric connection // Rev. Roum. Math. Pure Appl. 1970. Vol. 15. P. 1579—1586.

15. *Yano K., Imai T.* Quarter-symmetric metric connections and their curvature tensors // Tensor. New series. 1982. Vol. 38. P. 13—18.

Для цитирования: *Галаев С. В.* К геометрии субримановых многообразий, оснащенных канонической четверть-симметрической связностью // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 64—77. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-7.

MSC 2010: 53C17

S. V. Galaev
Saratov State University
83, Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia
sgalaev@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-7

On the geometry of sub-Riemannian manifolds equipped with a canonical quarter-symmetric connection

Submitted on April 2, 2023

In this article, a sub-Riemannian manifold of contact type is understood as a Riemannian manifold equipped with a regular distribution of codimension-one and by a unit structure vector field orthogonal to this distribution. This vector field is called a structural. On a sub-Riemannian manifold of contact type, a quarter-symmetric connection is defined, which is associated with an endomorphism that preserves the distribution of the sub-Riemannian manifold. It is proved that if the connection under study is metric, then the endomorphism associated to it is uniquely defined. The structure of the associated endomorphism is found. In the case when the structure vector field is a field of infinitesimal isometries, the quarter-symmetric connection is called the canonical N-connection. An expression is found for the curvature tensor of the canonical N-connection in terms of the Riemann curvature tensor. The properties of the Schouten curvature tensor are investigated, which provide, in particular, the necessary symmetries of the curvature tensor of an N-connection for its sectional curvature to be well-defined. A relation between the sectional curvature of the canonical N-connection and the sectional curvature of the Levi-Civita connection is found. Necessary and sufficient conditions are found under which the sectional curvature of the N-connection and the sectional curvature of the Levi-Civita connection coincide.

Keywords: sub-Riemannian manifolds of contact type, quarter-symmetric connection, sectional curvature, Schouten tensor

References

1. *Bukusheva, A. V.:* On geometry of Kenmotsu manifolds with N-connection. DGMF, 50, 48—60 (2019).

2. *Bukusheva, A. V.:* Non-holonomic Kenmotsu manifolds equipped with generalized Tanaka — Webster connection. DGMF, 52, 42—51 (2021).

3. *Galaev, S. V.:* Extended structures on codistributions of contact metric manifolds. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform. **16**:3, 263—272 (2016).

4. *Galaev, S. V.:* Almost contact metric spaces with N-connection. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **15**:3, 258—263 (2015).

5. *Galaev, S. V.:* Generalized Wagner's curvature tensor of almost contact metric spaces. Chebyshevskii sb., **17**:3, 53—63 (2016).

6. *Galaev, S. V., Gokhman, A. V.*: Almost symplectic connections on a nonholonomic manifold. Mathematics. Mechanics, 3, 28—31 (2001).

7. *Klepikov, P. N., Rodionov, E. D., Khromova, O. P.*: Sectional curvature of connections with vectorial torsion. Russ Math., 64, 75—79 (2020).

8. *Agricola, I., Kraus, M.:* Manifolds with vectorial torsion. Diff. Geom. and its App., 46, 130—146 (2016).

9. *Barua, B., Ray, A. Kr.:* Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold. Indian J. Pure App. Math., **16**:7, 736—740 (1985).

10. *Biswas, S. C., De, U. C.:* Quarter-symmetric metric connection in an SP-Sasakian manifold. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1, 46, 49—56 (1997).

11. *Cartan, E.:* Sur les varieties a connexion affine et la theorie de la relative generalisee. Part II. Ann. Ec. Norm., 42, 17—88 (1925).

12. *Galaev, S. V.:* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, **31**:1, 35—46 (2015).

13. *Golab, S.:* On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections. Tensor (N. S.), 29, 249—254 (1975).

14. *Yano, K.:* On semi-symmetric metric connection. Rev. Roum. Math. Pure Appl., 15, 1579—1586 (1970).

15. *Yano, K. Imai, T.:* Quarter-symmetric metric connections and their curvature tensors. Tensor (N. S.), 38, 13—18 (1982).

For citation: Galaev, S. V. On the geometry of sub-Riemannian manifolds equipped with a canonical quarter-symmetric connection. DGMF, 54 (1), 64—77 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-7.