УДК 514.7

И. А. Долгарев

(Пензенский государственный университет)

ПОВЕРХНОСТИ 3-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ГАЛИЛЕЯ С ПОСТОЯННОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

По коэффициентам квадратичных форм поверхности получены поверхности 3-мерного пространства-времени Галилея в случае, если метрическая функция поверхности постоянна. Указаны некоторые классы изометричных поверхностей.

Расстояние между точками $A(t_1, x_1, y_1)$ $B(t_2, x_2, y_2)$ в 3-мерном пространстве-времени Галилея $\mathbf{Г}^3$ определяется так:

$|AB| = |t_2 - t_1|, t_1 \neq t_2$; и $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, t_1 = t_2$.

Геометрия пространства $\mathbf{Г}^3$ изложена в [1]. Регулярная класса C^3 поверхность в $\mathbf{Г}^3$ описывается векторной функцией

$$\gamma(t,u) = (t, x(t,u), y(t,u)),\ (t,u) \in D \subseteq \mathbf{R}^2, \quad (1)$$

где $\mathbf{R}$ — поле действительных чисел; t — временной параметр, u — пространственный параметр. Вектор $\gamma(t,u)$ записывается в виде двух составляющих:

$$\gamma(t,u) = t\vec{e} + \vec{r}(t,u),\ \vec{r}(t,u) = (x(t,u), y(t,u)). \quad (2)$$

Здесь $\vec{r}(t, u)$ евклидова векторная функция — пространственная составляющая поверхности $\gamma(t, u)$, $\vec{e}$ — единичный вектор направления времени, $t\vec{e}$ — временная составляющая поверхности $\gamma(t, u)$. Первая квадратичная форма поверхности

$\gamma(t, u)$: $ds^2 = dt^2$, если t изменяется; $ds^2 = Edu^2$, если t не изменяется, $E = \vec{r}_u^{\,2} = x_u^{\,2} + y_u^{\,2}$. Функция $E = E(t, u) > 0$ называется метрической функцией поверхности $\gamma(t, u)$. Нижние индексы t, u означают, что рассматриваются частные производные по параметрам t, u. Вторая квадратичная форма поверхности равна

$$II = Adu^2 + 2Bdudt + Cdt^2, \; A = \vec{r}_{uu}\vec{n}, \; B = \vec{r}_{ut}\vec{n}, \; C = \vec{r}_{tt}\vec{n};$$

единичный вектор нормали поверхности: $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}(-y_u, x_u)$.

В [2] установлено, что коэффициенты E, A, B, C квадратичных форм поверхности определяют поверхность в пространстве-времени Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$ с точностью до положения — это аналог теоремы Бонне для поверхностей евклидова пространства. В [2] рассмотрен общий случай и случай, в котором все коэффициенты E, A, B, C постоянны. Ниже получены поверхности $\gamma(t, u)$ для которых $E = const$. Из [1] использована деривационная формула поверхности

$$\gamma_{tt} = \vec{r}_{tt} = C\vec{n}; \tag{3}$$

формула Гаусса

$$K = AC - B^2 = \frac{E_t^{\,2} - 2E_{tt}E}{4E} \tag{4}$$

и одна из формул Петерсона — Кодацци:

$$AE_t - BE_u = 2E(A_t - B_u). \tag{5}$$

Условие $E = const$ означает, что евклидов вектор $\vec{r}_u = (x_u, y_u)$ имеет постоянный модуль. Тогда $\vec{r}_{uu} \perp \vec{r}_u$ и $\vec{r}_{ut} \perp \vec{r}_u$. Так как $\vec{n} \perp \vec{r}_u$, то векторы $\vec{n}, \vec{r}_{uu}, \vec{r}_{ut}$ коллинеарны. Поэтому

$$A = \vec{r}_{uu}\vec{n} = \| \vec{r}_{uu} \|, \; B = \vec{r}_{ut}\vec{n} = \| \vec{r}_{ut} \|.$$

По коэффициентам E, A, B квадратичных форм поверхности и по компонентам приведенной деривационной формулы (3) поверхности получаем систему дифференциальных уравнений с частными производными

$$x_u^2 + y_u^2 = E(t,u),\ x_{uu}^2 + y_{uu}^2 = A^2(t,u),\ x_{ut}^2 + y_{ut}^2 = B^2(t,u),$$
$$x_{tt} = -\frac{C(t,u)}{\sqrt{E(t,u)}}\,y_u,\ y_{tt} = \frac{C(t,u)}{\sqrt{E(t,u)}}\,x_u. \qquad (6)$$

Второе и третье уравнения системы (6) отличаются от дифференциальных уравнений в [2].

Теорема 1. *Решением системы (6) дифференциальных уравнений с частными производными, где функции*

$$E = E(t, u) > 0,\ A = A(t, u),\ B = B(t, u),\ C = C(t, u)$$

класса C^3 заданы на области $\mathbf{D}$, при $E(t, u) = const$ являются функции $x = x(t, u)$, $y = y(t, u)$ — компоненты векторной функции поверхности $\gamma(t, u)$; они определены на области $\mathbf{D}$, как и функции E, A, B, C. Начальные условия

$$(t_0, u_0) \in D,\ \vec{r}(t_0, u_0) = \vec{a},\ \vec{r}(t_0, u_0) = \vec{a},\ \vec{r}_u(t_0, u_0) = \vec{b},$$
$$E(t_0, u_0) = E,\ \vec{r}_t(t_0, u_0) = \vec{c}$$

определяют единственную поверхность $\gamma(t, u)$.

Сначала докажем существование решений системы уравнений (6). Как и в [2], по первому уравнению системы (6) вводим обозначения:

$$x_u = \sqrt{E}\cos w,\ y_u = \sqrt{E}\sin w,\ w = w(t, u), \qquad (7)$$

функцию w предстоит найти. Дифференцируем функции (7) по параметру u: $x_{uu} = -\sqrt{E}w_u \sin w$, $y_{uu} = \sqrt{E}w_u \cos w$. По второму уравнению системы (6) имеем $Ew_u^2 = A^2$, откуда

$$w_u = \frac{A}{\sqrt{E}}.$$

Продифференцировав функций (7) по параметру t, находим

$$w_u = \frac{B}{\sqrt{E}}.$$

Значения производных w_u, w_t такие же, как в [2]. Вычисляем:

$$w_{ut} = \frac{2A_t E - AE_t}{2E\sqrt{E}}, \; w_{tu} = \frac{2B_u E - BE_u}{2E\sqrt{E}}.$$

На основании формулы (5) $w_{ut} = w_{tu}$. Это условие и определило выше выбор знаков для значений w_u и w_t. Имеем уравнение с полным дифференциалом

$$\frac{A}{\sqrt{E}}du + \frac{B}{\sqrt{E}}dt = 0, \tag{8}$$

его решением является функция $w = w(t, u)$.

При интегрировании функций (7) по параметру u появляются слагаемые, зависящие от параметра t:

$$x = \sqrt{E}\int \cos w du = \sqrt{E}\,\frac{1}{w_u}\sin w + c_1(t) = \frac{E}{A}\sin w + c_1(t), \tag{9}$$

$$y = \frac{E}{A}\cos w + c_2(t).$$

Для отыскания функций $c_1(t)$ и $c_2(t)$ используем, соответственно, четвертое и пятое уравнения системы (6) и значения (7). Имеем по (9):

$$x_{tt} = (\frac{E}{A}\sin w)_{tt} + c_1''(t);$$

и по четвертому уравнению системы (6):

$$x_{tt} = -\frac{C}{\sqrt{E}}y_u = -C\sin w.$$

Сравнивая результаты, получаем:

$$c_1(t) = -\int(\int C\sin w dt)dt - \frac{E}{A}\sin w. \qquad (10)$$

Аналогично находим функцию $c_2(t)$. Решение системы уравнений (6) с частными производными сведено к решению уравнения с полным дифференциалом и уравнений, определяющих функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$, т. е. решение системы уравнений (6) существует. Единственность решения обеспечивается заданными начальными условиями. #

В [2] в общем случае установлено, что коэффициенты квадратичных форм полученной поверхности совпадают с заданными. Если функции A, B, C постоянны, то решение уравнения (8) есть

$$w = \frac{A}{\sqrt{E}}u + \sqrt{\frac{AC}{E}}t + c.$$

Интегрируя (10), получаем

$$c_1(t) = C\frac{E}{AC}\sin w + c_1 t + c_4 - \frac{E}{A}\sin w = c_1 t + c_3.$$

Аналогично $c_2(t) = c_2 t + c_4$. В этом случае при $A \neq 0$ имеем:

$$x = \frac{E}{A}\sin w + c_1 t + c_3, \quad y = -\frac{E}{A}\cos w + c_2 t + c_4,$$

$$w = \frac{A}{\sqrt{E}}u + \sqrt{\frac{AC}{E}}t + c;$$

и при $A = 0$:

$$x = (\sqrt{E}\cos c)u + (C\sin c)t + c_1, \quad y = (\sqrt{E}\sin c)u + (C\cos c)t + c_2.$$

Как известно, поверхности, имеющие одинаковые первые квадратичные формы, изометричны; одна из другой такие поверхности получаются изгибанием. В пространстве Галилея изометричны поверхности, имеющие одну и ту же метрическую функцию $E = E(t,u)$. Выполняется

Теорема 2. *Если число E фиксировано, то общее решение системы (6) дифференциальных уравнений с частными производными определяет множество попарно изометричных поверхностей пространства-времени Галилея. Каждая из этих поверхностей получается изгибанием поверхности*

$$\gamma(t,u) = (t,\ \frac{E}{A}\sin w\,,\ -\frac{E}{A}\cos w)\,,\ w = \frac{A}{\sqrt{E}}u + \sqrt{\frac{AC}{E}t + c}\,,\ A \neq 0\,;$$

или при $A = 0$ поверхности

$$\gamma(t,u) = (t,\ (\sqrt{E}\cos c)u + (C\sin c)t\,, (\sqrt{E}\sin c)u + (C\cos c)t)\,.$$

Система уравнений (6) удовлетворяется составляющими $x = x(t, u)$, $y = y(t, u)$ приведенных функций $\gamma(t, u)$. Всякое частное решение системы (6) определяет поверхность с метрической функцией E.

Список литературы

1. *Долгарев А. И.* Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств: Монография. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2005.
2. *Долгарев И. А.* Нахождение поверхности в 3-мерном пространстве Галилея по ее квадратичным формам // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Сер. Естественные науки. 2006. №6(27). С. 51 — 60.

I. Dolgarew

SURFACES OF 3D SPACE OF GALILEI WITH A STATIONARY VALUE OF METRIC FUNCTION

On coefficients of the quadratic forms of a surface the surfaces of 3D space-time of Galilei are obtained in case the metric function of a surface is constant. Some classes of isomeric surfaces are indicated.