ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.19 1988

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИЯ ПАР КОНИК С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ АССОЦИИРОВАННЫХ ОБРАЗОВ

Л.Г.Корсакова

(Калининградский университет)

В пространстве P_3 продолжается изучение конгруэнций H [1],образующим элементом которых является пара коник,не лежащих в одной плоскости,причем коника C_2 касается линии ℓ пересечения плоскостей коник в точке A_1 ,а коника C_1 пересекает линию ℓ в точках A_1 и A_2 .Плоскости коник образуют двумерные многообразия.Рассматривается частный класс конгруэнций H ,определяемый вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

Отнесем конгруэнцию H к реперу $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$,где вершины A_3 и A_4 выбраны так,чтобы треугольники $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$ были автополярными треугольниками второго рода соответственно относительно коник C_1 и C_2 .

Определение. Конгруэнцией H^{Q_1,Q_2} назовем такую конгруэнцию H ,в которой каждая коника C_i $(i,j=1,2)$ конгруэнции(C_i) инцидентна одной квадрике Q_i .

Уравнения коник C_1, C_2 квадрик Q_1, Q_2 в выбранном репере R при соответствующей нормировке вершин в R и система дифференциальных уравнений конгруэнции H^{Q_1,Q_2} имеют вид:

$$(x^4)^2-2x^1x^2=0, \quad x^3=0; \quad (x^2)^2-2x^1x^3=0, \quad x^4=0, \tag{1}$$

$$(x^4)^2-2x^1x^2+x^3(2ax^1+2bx^2+2cx^4+hx^3)=0, \tag{2}$$

$$(x^2)^2-2x^1x^3+x^4(2mx^1+2nx^2+2kx^3+\tau x^4)=0, \tag{3}$$

$$\begin{cases} \omega_1^2=a\omega_1^3, \quad \omega_2^1=b\omega_2^3, \quad \omega_3^1=k\omega_3^4, \quad \omega_3^2=\omega_2^1-n\omega_3^4-k\omega_2, \\ \omega_1^3=m\omega_1, \quad \omega_2^3=\omega_1^2+m\omega_2+n\omega_1, \quad \Omega_1=2n\omega_2+m\omega_3^4+k\omega_1, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \omega_4^2=\omega_1+a\omega_4^3+c\omega_1^3, \quad \omega_4^1=\omega_2+b\omega_4^3+c\omega_2^3, \\ \Omega_2=2c\omega_4^3+a\omega_2^3+b\omega_1^3, \quad \omega_3^4=\Gamma_3^{4j}\omega_j; \quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3j}\omega_j, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} da=a(\omega_1^1+\omega_3^3-2\omega_4^4)-2ac\omega_4^3-\omega_3^2+b\omega_1^2+c\omega_1+h\omega_1^3, \\ db=b(\omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_4^4)-2bc\omega_4^3-\omega_3^1+a\omega_2^1+c\omega_2+h\omega_2^3, \\ dc=c(\omega_3^3-\omega_4^4)-2c^2\omega_4^3+\omega_3^4+a\omega_4^1+b\omega_4^2+h\omega_4^3, \\ \frac{1}{2}dh=h(\omega_3^3-\omega_4^4)-ch\omega_4^3+a\omega_3^1+b\omega_3^2+c\omega_3^4, \\ dm=m(\omega_1^1+\omega_4^4-2\omega_2^2)-2mn\omega_2-\omega_4^3+n\omega_1^2+\tau\omega_1+k\omega_1^3, \\ dn=n(\omega_2^2+\omega_4^4-2\omega_2^2)-2n^2\omega_2+\omega_4^2+m\omega_2^1+\tau\omega_2+k\omega_2^3, \\ dk=k(\omega_3^3+\omega_4^4-2\omega_2^2)-2kn\omega_2-\omega_4^1+m\omega_3^1+n\omega_3^2+\tau\omega_3^4, \\ \frac{1}{2}d\tau=\tau(\omega_4^4-\omega_2^2)-\tau n\omega_2+m\omega_4^1+n\omega_4^2+k\omega_4^3, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\omega_i^4 \overset{def}{=} \omega_i, \quad \Omega_1 \overset{def}{=} \omega_1^1+\omega_3^3-2\omega_2^2, \quad \Omega_2 \overset{def}{=} \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4.$$

Доказано,что конгруэнции H^{Q_1,Q_2} существуют и определяются с произволом двух функций от двух аргументов.

Определение.Конгруэнцией H_0 называется такая конгруэнция H^{Q_1,Q_2},для которой: 1) точки A_3 и A_4 полярно сопряжены относительно Q_1 ;2) линии на характеристической поверхности (A_4) ,огибаемые прямыми A_iA_4,являются ее асимптотическими линиями. Из определения конгруэнции H_0 следует,что для нее

$$c=0, \quad \omega_4^3=0, \quad am+n=0. \tag{7}$$

Уравнение $\omega_4^3=0$ -вполне интегрируемое.Замыкая соотношение $am+n=0$, получим два конечных уравнения

$$\tau+2mk-n^2=0, \quad m^2h-2bmn+1=0. \tag{8}$$

Замыкания уравнений (8) новых связей не дают,поэтому конгруэнции H_0 определяются уравнениями (4),(7),(8) и уравнениями

$$\omega_4^2 = \omega_1, \quad \omega_4^1 = \omega_2, \quad \Omega_2 = a\omega_2^3 + b\omega_1^3, \quad \omega_3^4 = -a\omega_4^1 - b\omega_4^2, \tag{9}$$

$$\begin{cases} da = a(\omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4) - \omega_3^2 + b\omega_1^2 + h\omega_1^3, \\ db = b(\omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4) - \omega_3^1 + a\omega_2^1 + h\omega_2^3, \\ \frac{1}{2}dh = h(\omega_3^3 - \omega_4^4) + a\omega_3^1 + b\omega_3^2, \\ dm = m(\omega_1^1 + \omega_4^4 - 2\omega_2^2) - 2mn\omega_2 + n\omega_1^2 + \tau\omega_1 + k\omega_1^3, \\ dn = n(\omega_2^2 + \omega_4^4 - 2\omega_2^2) - 2n^2\omega_2 + \omega_4^2 + m\omega_2^1 + \tau\omega_2 + k\omega_2^3, \\ dk = k(\omega_3^3 + \omega_4^4 - 2\omega_2^2) - 2kn\omega_2 - \omega_4^1 + m\omega_3^1 + n\omega_3^2 + \tau\omega_3^4, \\ \frac{1}{2}d\tau = \tau(\omega_4^4 - \omega_2^2) - \tau n\omega_2 + m\omega_4^1 + n\omega_4^2. \end{cases} \tag{10}$$

Исследуя систему (4),(7)-(10),убеждаемся,что конгруэнции H_0 определяются вполне интегрируемой системой уравнений и что справедлива следующая

Т е о р е м а . Конгруэнции H_0 обладают следующими геомет рическими свойствами: I) многообразие прямых $(A_i A_4)$-одномерное 2) поверхности (A_i) вырождаются в линии; 3) одно семейство тор сов конгруэнции $(A_i A_3)$ соответствует координатным линиям $\omega_i=$ 4) поверхность (A_4) является невырожденной инвариантной квадри кой $\Phi \equiv (mh-nb)(x^3)^2 - mx^1x^2 - nx^1x^3 + bmx^2x^3 + x^3x^4 = 0$.

Библиографический список

I. К о р с а к о в а Л.Г. Об одном классе конгруэнций пар коник в P_3 // Тезисы докл. УI Прибалтийской геометрической конференции. Таллин, I984. С.63.

2. К о р с а к о в а Л.Г. Пары конгруэнций коник в P_3, не касающихся линии пересечения своих плоскостей // Тез.докл. Всесоюзн.конф. по неевклидовой геометрии " I50 лет геометрии Лобачевского". - Казань: Изд-во Казанского ун-та. I976. С.I04.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I9 1988

УДК 514.75

О ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ В ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Н.В. М а л а х о в с к и й
(Калининградский университет)

Исследуются невырожденные двумерные многообразия в прямом произведении двух трехмерных проективных пространств $P_3^{(1)}$ и $P_3^{(2)}$. Построен частично канонизированный репер таких многообразий, определены на них четыре инвариантных однопараметрических семейства и выделены некоторые подклассы подмногообразий со специальными свойствами проекций на базисные пространства $P_3^{(1)}, P_3^{(2)}$.

Рассмотрим прямое произведение P двух трехмерных проективных пространств $P_3^{(1)}, P_3^{(2)}$ [I, с.224]

$$P = P_3^{(1)} \times P_3^{(2)} = \{(M_1, M_2) \mid M_1 \in P_3^{(1)}, M_2 \in P_3^{(2)}\}. \tag{I}$$

Отнесем пространство P к подвижному реперу $R = \{A_{1,\alpha}; A_{2,\alpha}\}$, $\alpha = 0, I, 2, 3$. Тогда

$$M_i = x_i^\alpha A_{i,\alpha} \qquad (i = I, 2). \tag{2}$$

Деривационные формулы репера R запишутся в виде

$$dA_{i,\alpha} = \omega_{i,\alpha}^\beta A_{i,\beta}, \tag{3}$$

где формы Пфаффа $\omega_{i,\alpha}^\beta$ удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_{i,\alpha}^\beta = \omega_{i,\alpha}^\gamma \wedge \omega_{i,\gamma}^\beta \tag{4}$$

и условию эквипроективности $\omega_{i,\alpha}^\alpha = 0$.

Рассмотрим в пространстве P m-мерное многообразие $\mathfrak{M}_m$ ($m = \overline{I,5}$). Отнесем это многообразие к реперу нулевого порядка, расположив вершины $A_{1,0}$ и $A_{2,0}$ в проекциях текущей точки $M \in \mathfrak{M}_m$ в пространства $P_3^{(1)}, P_3^{(2)}$. Тогда формы Пфаффа

$$\omega_{i,0}^{\hat\alpha} \qquad (\hat\alpha, \hat\beta = I, 2, 3) \tag{5}$$