ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

В.В.Махоркин

МНОГООБРАЗИЯ ГИПЕРКВАДРИК n-МЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА И ИХ ФОКАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

В работе исследуются многообразия гиперквадрик n-мерного проективного пространства, их фокальные многообразия, а также ассоциированные с ними конструкции. Рассматриваются поверхности в пространстве P_n, порожденные фокальными многообразиями. Осуществлена канонизация репера и дана его геометрическая характеристика.

§I. Фундаментальный объект порядка p многообразия $K(m,n)$

Рассмотрим проективное пространство P_n и в нем подвижной репер $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются уравнениями:

$$d A_\alpha = \omega^\beta_\alpha A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, n), \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω^β_α удовлетворяют уравнениям структуры проективной группы

$$d\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma \tag{1.2}$$

и условию

$$\omega^0_0 + \omega^1_1 + \dots + \omega^n_n = 0. \tag{1.3}$$

Уравнение невырожденной гиперквадрики Q_{n-1} в репере $\{A_\alpha\}$ имеет вид:

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \tag{1.4}$$

причем

$$\det \| a_{\alpha\beta} \| \neq 0, \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}. \tag{1.5}$$

Положим:

$$\Theta_{\alpha\beta} \equiv d a_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\,\omega^\gamma_\alpha - a_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma_\beta. \tag{1.6}$$

Тогда система дифференциальных уравнений, определяющая многообразие $K(m,n)$, примет вид (см. [1]):

$$\Theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i}\,\tau^i, \quad \Delta\Lambda_{\alpha\beta i} \wedge \tau^i = 0, \tag{1.7}$$

где

$$\Delta\Lambda_{\alpha\beta i} \equiv d\Lambda_{\alpha\beta i} - \Lambda_{\gamma\beta i}\,\omega^\gamma_\alpha - \Lambda_{\alpha\gamma i}\,\omega^\gamma_\beta - \Lambda_{\alpha\beta j}\,\tau^j_i, \tag{1.8}$$

$$(i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, m),$$

а формы τ^i, τ^i_j являются инвариантными формами бесконечной аналитической группы преобразований пространства параметров (см. [2]). Осуществляя продолжение системы (1.7), получим фундаментальный объект многообразия $K(m,n)$ порядка p:

$$\{ a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta i_1}, \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2}, \dots, \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2 \dots i_p} \}. \tag{1.9}$$

§ 2. Фокальные многообразия

Используя фундаментальный объект (1.9) порядка p многообразия $K(m,n)$, построим следующую систему уравнений

$$F_0 = 0, \; F_{i_1} = 0, \; \dots, \; F_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0, \tag{2.1}$$

где

$$F_0 \equiv a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta, \quad \Gamma_{i_1 i_2 \dots i_p} \equiv \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2 \dots i_p}\, x^\alpha x^\beta,$$

причем

$$n = N_p + 1, \tag{2.2}$$

где

$$N_p = m + \frac{m(m+1)}{2!} + \ldots + \frac{m(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+p-1)}{p!} . \qquad (2.3)$$

В этом случае система уравнений (2.1) состоит из n уравнений и определяет в общем случае 2^n фокальных точек ранга p (см. [1]).

Фокальные многообразия ранга q $(<p)$ определяются следующей системой уравнений:

$$F_0 = 0,\ F_{i_1} = 0,\ \ldots,\ F_{i_1 i_2 \ldots i_q} = 0 \qquad (2.4)$$

и являются в общем случае алгебраическими многообразиями размерности $n - N_q - 1$ порядка $2^{N_q + 1}$.

Таким образом, с каждой гиперквадрикой многообразия $K(m,n)$ ассоциируется последовательность фокальных многообразий ${}^{(q)}f(m,n)$, обладающих следующими свойствами:

$${}^{(p)}f(m,n) \subset {}^{(p-1)}f(m,n) \subset \ldots \subset {}^{(2)}f(m,n) \subset {}^{(1)}f(m,n) \subset Q_{n-1} . \qquad (2.5)$$

§ 3. Канонизация репера

Используя (1.7), (1.8) и (2.1), осуществим следующую канонизацию репера $\{A_\alpha\}$:

$$a_{00} = \Lambda_{00i_1} = \ldots = \Lambda_{00i_1\ldots i_p} = 0 , \qquad (3.1)$$
$$a_{0k} = \Lambda_{0ki_1} = \ldots = \Lambda_{0ki_1\ldots i_p} = 0 .$$

Геометрически такая канонизация означает, что вершина A_0 репера $\{A_\alpha\}$ помещается в одну из фокальных точек ранга p, а плоскость L_0, натянутая на вершины $A_0, A_1, \ldots, A_m$, содержится в пересечении плоскостей, касательных к многообразиям ${}^{(q)}f(m,n)$ в точке A_0. Касательная плоскость L_q к фокальному многообразию ${}^{(q)}f(m,n)$ в точке A_0 определяется следующей системой уравнений:

$$a_{0\hat\xi} x^{\hat\xi} = 0,\ \Lambda_{0\hat\xi i_1} x^{\hat\xi} = 0,\ \ldots,\ \Lambda_{0\hat\xi i_1\ldots i_p} x^{\hat\xi} = 0 \qquad (3.2)$$
$$(\hat\eta, \hat\xi, \ldots = m+1, \ldots, n).$$

Таким образом

$$L_0 \subset L_{p-1} \subset \ldots \subset L_1 . \qquad (3.3)$$

Так как фокальное многообразие ${}^{(q)}f(m,n)$ определяется квадрикой Q_{n-1} многообразия $K(m,n)$, то оно локально порождает в пространстве P_n поверхность S_q, образующей которой является многообразие ${}^{(q)}f(m,n)$. Эти поверхности также обладают свойством:

$$S_p \subset S_{p-1} \subset \ldots \subset S_1 . \qquad (3.4)$$

Анализируя предыдущее, получаем:

Т е о р е м а . В общем случае многообразие $K(m,n)$ огибает поверхность S_1, касаясь ее вдоль ${}^{(1)}f(m,n)$, поверхность S_1 огибает поверхность S_2, касаясь ее вдоль ${}^{(2)}f(m,n)$, ..., поверхность S_{p-1} огибает поверхность S_p, касаясь ее вдоль ${}^{(p)}f(m,n)$.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в -мерном проективном пространстве.-"Тр. геометрического семинара ВИНИТИ СССР", 1974, 6, с. 113-133.

2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей.-"Итоги науки ВИНИТИ. Геометрия", 1963, с. 5-64.