ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

В.В.МАХОРКИН

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК В P_3 С ПЛОСКИМИ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.

В работе рассматриваются некоторые типы конгруэнций коник в трехмерном проективном пространстве с плоскими фокальными поверхностями. Доказано, что сдваивание плоских фокальных поверхностей приводит к их вырождению. Исследована конгруэнция коник в P_3, у которой две фокальные поверхности суть плоскости и характеристическая точка плоскости коники инцидентна конике.

§ I. Введение.

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнцией Π_m называется конгруэнция коник в P_3, у которой m (m = I, 2, 3) фокальных поверхностей суть плоскости, а фокальные линии на этих поверхностях не соответствуют друг другу.

В дальнейшем плоские фокальные поверхности будем называть фокальными плоскостями.

Репер $R \equiv \{\bar{A}_\alpha\}$ (α, β, γ = I, 2, 3, 4) конгруэнции Π_m строится следующим образом: первые m вершин помещаются в фокальные точки коники, описывающие плоскости, следующие $(3-m)$ вершин — в произвольные оставшиеся фокальные точки, а вершину A_4 помещаем в подпространство, являющееся пересечением m фокальных плоскостей. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{A}_\beta, \tag{1.1}$$

где ω_α^β подчинены уравнениям структуры проективной группы:

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

Уравнения коники относительно этого репера запишутся в виде:

$$x^1 x^2 + a_\kappa x^\kappa x^3 = 0, \quad x^4 = 0, \quad a_\kappa \neq 0, (\kappa = 1,2) \tag{1.3}$$

Система уравнений для определения фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнции Π_m имеет вид (см. [I], [2]):

$$\begin{gathered} x^1 x^2 + a_\kappa x^\kappa x^3 = 0, \ x^4 = 0, \ x^\kappa \omega_\kappa + x^3 \omega_3^4 = 0, \\ \Delta a_\kappa x^\kappa x^3 - (x^1)^2 (\omega_1^2 + a_1 \omega_1^3) - (x^2)^2 (\omega_2^1 + a_2 \omega_2^3) - \\ - (x^3)^2 (a_1 \omega_3^1 + a_2 \omega_3^2) = 0, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\omega_\kappa = \omega_\kappa^4$,

$$\Delta a_\kappa \equiv d a_i + a_i(\omega_j^j - \omega_3^3 + a_j \omega_i^3 + a_i \omega_j^3) - \omega_3^j - a_j \omega_i^j. \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем будем считать $i \neq j$, $i, j = 1, 2$ и по этим индексам не суммировать. Так как у конгруэнции Π_m фокальные линии не соответствуют друг другу, то за независимые первичные формы можно взять формы ω_κ. Нормируем вершины A_α репера R так, чтобы

$$a_1 = a_2 = 1, \tag{1.6}$$

тогда формы:

$$\theta_i \equiv \omega_i^i - \omega_3^3 \tag{1.7}$$

станут главными.

§ 2. Конгруэнции Π_3.

Т е о р е м а I. Конгруэнции Π_3 существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как первые m точек репера R фокальные, то из (I.4) получим систему уравнений:

$$\Omega_n = \lambda_n \omega_n^4 \quad ,(n = \text{I}, 2, 3), \tag{2.1}$$

где

$$\Omega_i = \omega_i^j + \omega_i^3, \ \Omega_3 = \omega_3^1 + \omega_3^2 \tag{2.2}$$

Учитывая, что фокальные поверхности $(A_1)(A_2)(A_3)$ являются плоскостями, приводим систему уравнений Пфаффа, определяющую конгруэнцию Π_3, к виду:

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_n = 0,\ \omega_4^n = 0,\ \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \\ &\theta_i = b_i^k\omega_k,\ \omega_3^i - \omega_i^3 - \theta_i = 0,\ \omega_i^j - \omega_j^i - \theta_j + \theta_i = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

Анализируя систему (2.3), устанавливаем справедливость теоремы 1.

Определение 2. Конгруэнцией Π_m^2 называется конгруэнция Π_m с m сдвоенными фокальными плоскостями.

В случае вырождения m фокальных поверхностей в линии ℓ_m репер R этой конгруэнции строится следующим образом: первые m вершин помещаем в те фокальные точки коники, которые описывают линии ℓ_m, следующие $(3-m)$ вершин—в произвольные оставшиеся фокальные точки, а вершину A_4 помещаем в подпространство, являющееся пересечением m плоскостей, каждая из которых определена касательной к конике и касательной к выродившейся фокальной поверхности в соответствующих фокальных точках.

Рассмотрим конгруэнцию Π_3^2. Из системы уравнений (1.4) следует, что сдвоенность трех фокальных плоскостей дает следующие условия:

$$b_i^i = 0,\ b_1^2\Gamma_3^{41} + b_2^1\Gamma_3^{42} = 0. \quad (2.4)$$

Пусть

$$b_1^2 b_2^1 \neq 0. \quad (2.5)$$

Тогда уравнения (2.4) приводятся к виду:

$$b_i^i = 0,\ \Gamma_3^{4i} = (-1)^i a b_j^i, \quad (2.6)$$

где $a \neq 0$ -новая функция.

Уравнения (2.3) и (2.6) определяют конгруэнцию Π_3^2.

Теорема 2. Конгруэнции Π_3^2 существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Доказательство. Учитывая в уравнениях (2.3) и их замыканиях условия (2.6), убеждаемся, что система в инволюции и имеет решение с произволом трех функций одного аргумента.

Теорема 3. В конгруэнции Π_3^2 фокальные поверхности (A_n) вырождаются в плоские линии.

Доказательство. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} &d\bar A_i = \omega_i^i \bar A_i + \omega_i[\,b_j^i(\bar A_j - \bar A_3) + \bar A_4] \\ &d\bar A_3 = \omega_3^3\bar A_3 + (b_1^2\omega_2 - b_2^1\omega_1)(\bar A_1 - \bar A_2 + a\bar A_4) \end{aligned}\right\} \quad (2.7)$$

Из (2.7) непосредственно следует, что поверхности (A_n) являются линиями. Так как

$$(d^p\bar A_i, \bar A_i, \bar A_j - \bar A_3, \bar A_4) = 0,\ (d^p\bar A_3, \bar A_3, \bar A_1 - \bar A_2, \bar A_4) = 0 \quad (2.8)$$

то линии (A_n)-плоские.

§ 3. Конгруэнции Π_2.

Теорема 4. Конгруэнции Π_2 существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Доказательство. Конгруэнция Π_2 определяется системой уравнений Пфаффа:

$$\left.\begin{aligned} &\theta_i = b_i^k\omega_k,\ \Omega_i = 0,\ \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \\ &\omega_3^i - \omega_i^3 - \theta_i = 0,\ \omega_4^i + \omega_4^3 = 0,\ \omega_3^4 = \lambda(\omega_3^1 + \omega_3^2). \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

Анализируя систему (3.1), получаем утверждение теоремы 4.

Характеристической точкой плоскости коники является точка:

$$\bar M = \bar A_3 - c^2\bar A_2 - c^1\bar A_1, \quad (3.2)$$

где

$$c^i = \lambda(\Gamma_3^{ii} + \Gamma_3^{ji}),\quad \Gamma_3^{ii} + \Gamma_3^{ji} \neq 0. \quad (3.3)$$

Определение 3. Конгруэнцией Π_2' называется конгруэнция Π_2, у которой характеристическая точка плоскости коники инцидентна конике.

Легко показать, что если характеристическая точка M плоскости коники инцидентна конике, то она является её фокальной точкой. Не умаляя общности, будем считать, что у конгруэнции Π_2 она является фокальной точкой A_3. Тогда

$$\omega_3^4 = 0. \quad (3.4)$$

Замыкая (3.4), получим:

$$\Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21} = \Gamma_0. \quad (3.5)$$

Конгруэнция Π_2' существует и определяется с произволом трех функций двух аргументов.

Уравнения асимптотических линий поверхности (A_3) имеют вид:

$$\Gamma_3^{11}(\omega_1)^2 + 2\Gamma_0\omega_1\omega_2 + \Gamma_3^{22}(\omega_2)^2 = 0 \qquad (3.6)$$

О п р е д е л е н и е 4. Конгруэнцией Π_2'' называется конгруэнция Π_2', характеризуемая условиями :

$$\Gamma_3^{11} = 0\,,\ \Gamma_3^{22} = 0. \qquad (3.7)$$

Из уравнений (3.1),(3.4),(3.5),(3.7) непосредственно следует, что конгруэнция Π_2'' существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 5. Фокальные линии на поверхностях (A_1) и (A_2) конгруэнции Π_2'' соответствуют асимптотическим линиям на поверхности (A_3).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из определения конгруэнции Π_2' следует, что уравнение асимптотических линий на поверхности (A_3) имеет вид :

$$\omega_1\omega_2 = 0. \qquad (3.8)$$

С л е д с т в и е I. Асимптотические касательные к поверхности (A_3) в точке A_3 проходят через фокальные точки A_1 и A_2 соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из условий (3.7) следует, что

$$(d\bar{A}_3)_{\omega_i=0} = \omega_3^3\bar{A}_3 + \Gamma_0\omega_j\bar{A}_i. \qquad (3.9)$$

О п р е д е л е н и е 5. Конгруэнцией Π_2''' называется конгруэнция Π_2'' с двумя сдвоенными фокальными плоскостями.

Системой уравнений для определения фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнции Π_2'' являются:

$$x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3 = 0\,,\ x^4 = 0,\ x^k\omega_k = 0, \qquad (3.10)$$
$$2\,\omega_k^3 x^k - x^3(\omega_3^1 + \omega_3^2) = 0.$$

Из системы (3.10) получаем, что сдвоенность (A_i) дает следующее условие :

$$b_1^2 = b_2^1 = \Gamma_0. \qquad (3.11)$$

Т е о р е м а 6. Конгруэнции Π_2''' существуют и определяются с произволом двух постоянных.

Д о к а з а т е л ь с т в о . При соответствующей канонизации репера R $(\Gamma_0 = 1,\ b_k^k = 0)$ система уравнений, определяющая конгруэнцию Π_2''', принимает вид:

$$\Theta_1 = b_0\omega_1 + \omega_2\,,\ \Theta_2 = \omega_1 - b_0\omega_2\,,\ \Omega_i = 0\,,\ \omega_3^i = \omega_j,$$
$$\omega_3^i - \omega_i^3 - \Theta_i = 0\,,\ \omega_4^i + \omega_4^3 = 0\,,\ \omega_4^3 = 2b_0\omega_1 + \Gamma_4^{32}(\omega_1 + \omega_2), \qquad (3.12)$$
$$db_0 = (b_0^2 - b_0 - \Gamma_4^{32})(\omega_1 - \omega_2),$$
$$d\Gamma_4^{32} = (3b_0^2 + 4b_0\Gamma_4^{32} + \Gamma_4^{32})(\omega_1 - \omega_2),\ (b_0 = b_1^1).$$

Система (3.12) замкнутая и имеет решение с произволом двух постоянных.

Т е о р е м а 7. В конгруэнциях Π_2''' поверхность (A_3) является линейчатой квадрикой; а линии (A_i)-сечения этой квадрики стационарными плоскостями (A_1QA_4) и (A_2QA_4), где

$$\bar{Q} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 - \bar{A}_3. \qquad (3.13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из определения конгруэнции следует, что

$$d[\bar{A}_3\bar{A}_i]_{\omega_i=0} = \lambda[\bar{A}_3\bar{A}_i]\,,$$

то есть на поверхности (A_3) имеется два семейства прямолинейных образующих. Следовательно, поверхность (A_3) – линейчатая квадрика. Вторая часть теоремы 7 следует из (3.14) и определения 5.

Л и т е р а т у р а .

1. Н.Г.Туганов, О конгруэнции линий второго порядка в трехмерном проективном пространстве, ДАН СССР, 100, №1, 13-15, 1955.
2. В.С.Малаховский, Конгруэнция кривых второго порядка с одной фокальной поверхностью вырождающейся в точку. Геометрический сборник, вып.3, Труды Томского университета, т.168, 43-53, 1963.