УДК 514.75

***М. В. Кретов*[1]**

*[1] Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*

blta@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-8

## Комплексы эллипсоидов с индикатрисами координатных векторов в виде поверхностей

Продолжается исследование в трехмерном аффинном пространстве комплексов (трехпараметрических семейств) эллипсоидов, рассмотренных ранее в ряде работ автора. Изучается многообразие эллипсоидов, когда концы координатных векторов совпадают с фокальными точками, а первая координатная прямая описывает цилиндрическую поверхность, при этом на образующем элементе имеются по крайней мере три фокальные точки, не лежащие на одной прямой и на одной плоскости, проходящей через центр, и определяющие три сопряженных направления. Из указанного многообразия выделяется комплекс эллипсоидов при условии, когда индикатрисы второго и третьего координатных векторов будут описывать поверхности с касательными плоскостями, параллельными третьей координатной плоскости, а конец второго координатного вектора описывает линию с касательной, параллельной первому координатному вектору. Доказана теорема существования исследуемого многообразия. Найдены геометрические свойства рассматриваемого комплекса.

Доказано, что конец первого координатного вектора, точки первой координатной прямой, а также первой координатной плоскости описывают двупараметрическое семейство плоскостей, конец третьего координат-

---

*Поступила в редакцию 17.02.2021 г.*

ного вектора описывает двупараметрическое семейство цилиндрических плоскостей, точка третьей координатной плоскости описывает однопараметрическое семейство линий с касательными, параллельными первому координатному вектору.

Характеристическое многообразие образующего элемента состоит из шести точек: вершины репера, трех концов координатных векторов и двух концов: суммы первого и второго координатных векторов, а также суммы первого и третьего координатных векторов. Фокальное многообразие эллипсоида, пробегающего исследуемый комплекс, состоит только из трех точек, являющихся концами координатных векторов.

***Ключевые слова:*** комплекс, конгруэнция, репер, эллипсоид, аффинное пространство, индикатриса вектора, характеристическое многообразие, фокальное многообразие.

В трехмерном аффинном пространстве продолжается исследование комплексов (трехпараметрических семейств) эллипсоидов, изучение которых было начато в работах [1—5], в репере $r = \{A, \bar{e}_i\}$, $i, j, k, ... = \overline{1,3}$, построенном в работе [2].

Обозначим через $A_i$ концы векторов $\bar{e}_i$, $M_i$ — текущие точки координатных осей $(A, \bar{e}_i)$, $M_{3+i}$ — текущие точки соответственно первой, второй и третьей координатных плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ и $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Репер $r$ в работе [2] специализирован следующим образом: концы векторов $\bar{e}_i$ совпадают с фокальными точками $A_i$ [6], при этом репер будет каноническим. В этой же работе рассмотрен комплекс эллипсоидов $K_3^0$, когда прямая $(AA_1)$ описывает цилиндрическую поверхность и на эллипсоиде $q$ имеются по крайней мере три фокальные точки $A_i$, которые не лежат на одной прямой и на одной плоскости, проходящей через центр, и определяют три сопряженных направления. При этом уравнение эллипсоида $q$ и система уравнений Пфаффа комплекса $K_3^0$ соответственно имеют вид

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \tag{1}$$

$$\omega_i^i = -\omega^i,\ \omega_1^2 = 0,\ \omega_2^1 = \alpha\omega^2 + \beta\omega^3,\ \omega_1^3 = 0, \tag{2}$$

$$\omega_3^1 = \beta\omega^2 + \gamma\omega^3,\ \omega_2^3 = \lambda\omega_3^2 - \omega^3,\ \omega_3^2 = (\lambda в_{33}^2 - 1)\omega^2 + в_{33}^2\omega^3.$$

Для комплексов $K_3^0$ справедливы условия

$$dA = \omega^1\overline{e}_1 + \omega^2\overline{e}_2 + \omega^3\overline{e}_3,\ d\overline{e}_1 = -\omega^1\overline{e}_1, \tag{3}$$

$$d\overline{e}_2 = (\alpha\omega^2 + \beta\omega^3)\overline{e}_1 - \omega^2\overline{e}_2 + (\lambda(\lambda в_{33}^2 - 1)\omega^2 + в_{33}^2\omega^3) - \omega^3)\overline{e}_3,$$

$$d\overline{e}_3 = (\beta\omega^2 + \gamma\omega^3)\overline{e}_1 + ((\lambda в_{33}^2 - 1)\omega^2 + в_{33}^2\omega^3)\overline{e}_2 - \omega^3\overline{e}_3.$$

В настоящей работе будем исследовать комплексы эллипсоидов $\overline{K}$, выделенные из многообразия $K_3^0$ при условии, что индикатрисы второго и третьего координатных векторов будут описывать поверхности с касательными плоскостями, параллельными координатной плоскости $(A, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$, а конец координатного вектора $\overline{e}_2$ будет описывать линию с касательной прямой, параллельной вектору $\overline{e}_1$. Тогда в системе уравнений Пфаффа (2) коэффициенты $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\lambda$ обратятся в нуль. При этом

$$d\overline{e}_2 = -\omega^2\overline{e}_2 - \omega^3\overline{e}_3,\ d\overline{e}_3 = (\mu\omega^3 - \omega^2)\overline{e}_2 - \omega^3\overline{e}_3, \tag{4}$$

$$dA_2 = \omega^1\overline{e}_1, \text{ где } \mu = в_{33}^2.$$

Система уравнений Пфаффа комплекса эллипсоидов $\overline{K}$ запишется в виде

$$\omega_i^i = -\omega^i,\ \omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_1^3 = \omega_3^1 = 0,\ \omega_2^3 = -\omega^3, \tag{5}$$

$$\omega_3^2 = -\omega^2 + \mu\omega^3.$$

**Теорема 1.** *Комплексы эллипсоидов* $\overline{K}$ *существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента.*

*Доказательство.* Чистое замыкание [7] системы (5) имеет вид

$$d\mu \wedge \omega^3 - 2\mu(\omega^2 \wedge \omega^3) = 0 . \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, $N = Q = 1$. Система (5, 6) в инволюции и определяет комплексы эллипсоидов $\overline{K}$ с произволом одной функции одного аргумента. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Комплексы эллипсоидов* $\overline{K}$ *обладают следующими геометрическими свойствами:*

*1) конец первого координатного вектора, точки первой координатной прямой, а также первой координатной плоскости описывают конгруэнции плоскостей;*

*2) конец третьего координатного вектора описывает конгруэнцию цилиндрических поверхностей;*

*3) точки третьей координатной плоскости описывают однопараметрическое семейство линий с касательными прямыми, параллельными первому координатному вектору.*

*Доказательство.* Для исследуемого комплекса эллипсоидов найдем следующие дифференциалы:

$$\begin{gathered} dA_1 = \omega^2 \overline{e}_2 - \omega^3 \overline{e}_3 , \\ dA_2 = \omega^1 \overline{e}_1 , \\ dA_3 = \omega^1 \overline{e}_1 - \mu\omega^3 \overline{e}_3 , \\ dM_1 = \omega^2 \overline{e}_2 + \omega^3 \overline{e}_3 , \\ dM_2 = \omega^1 \overline{e}_1 + x^3(\omega^2 - \mu\omega^3)\overline{e}_2 + \omega^3(1 - x^2)\overline{e}_3 , \qquad (7) \\ dM_3 = \omega^1 \overline{e}_1 + (\omega^2 - x^3\omega^2 + \mu x^3 \omega^3)\overline{e}_2 + x^2 \omega^3 \overline{e}_3 , \\ dM_4 = x^3(\omega^2 - \mu\omega^3)\overline{e}_2 + \omega^3(1 - x^2)\overline{e}_3 , \\ dM_5 = x^1(1 - \omega^1)\overline{e}_1 + (\omega^2 - x^3\omega^2 + \mu\omega^3 x^3)\overline{e}_2 + x^2 \omega^3 \overline{e}_3 , \\ dM_6 = \omega^1 \overline{e}_1 . \end{gathered}$$

Анализируя и дифференцируя формулы (7) согласно методике исследования, изложенной в книге [8], убеждаемся в справедливости теоремы.

Характеристическое многообразие [6] эллипсоида $q$ задается системой уравнений

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ F_3 = 0, \tag{8}$$

где $F_k$ удовлетворяют уравнению $-\frac{1}{2}dF = F_k\omega^k$.

Для исследуемого комплекса эллипсоидов система (8) примет вид

$$x^1(x^1 - 1) = 0,\ x^2(x^2 + x^3 - 1) = 0,\ x^3(x^2 + x^3 - \mu x^2 - 1) = 0. \tag{9}$$

Из системы уравнений (9) следует

**Теорема 3.** *Характеристическое многообразие эллипсоида $q$, описывающего рассматриваемый комплекс $\overline{K}$, состоит из концов всех координатных векторов и сумм первого и второго координатных векторов, а также первого и третьего координатных векторов и из вершины репера.*

Фокальное многообразие [6] эллипсоида $q$ изучаемого трехпараметрического семейства определяется уравнением (1) и системой уравнений (9), откуда следует, что оно состоит только из трех точек, являющихся концами координатных векторов.

### *Список литературы*

1. *Кретов М.В.* Комплексы эллипсоидов в аффинном пространстве // ДГМФ. Калининград, 1979. Вып. 10. С. 41—47.

2. *Кретов М.В.* О комплексах центральных квадрик в аффинном пространстве // ДГМФ. Калининград, 1980. Вып. 11. С. 51—60.

3. *Кретов М.В.* О трехпараметрическом семействе квадрик в аффинном пространстве // Вестник РГУ им. И. Канта. 2008. Вып. 10. С. 95—98.

4. *Кретов М.В.* Трехпараметрическое семейство эллипсоидов, допускающее конструирование // Вестник БФУ им. И. Канта. 2014. Вып. 10. С. 68—71.

5. *Кретов М.В.* О полях геометрических объектов, связанных с комплексом центральных невырожденных гиперквадрик // Вестник БФУ им. И. Канта. 2015. Вып. 10. С. 76—80.

6. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в *n*-мерном проективном пространстве // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ АН СССР. М., 1974. Вып. 6. С. 113—133.

7. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

8. *Малаховский В.С.* Краткий курс дифференциальной геометрии. Калининград, 2010.



*M. V. Kretov*[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
*14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia*
kretov1@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-8

## Complexes of ellipsoids with indicatrices of coordinate vectors in the form of surfaces

Submitted on February 17, 2021

The study continues in a three-dimensional affine space of complexes of three-parameter families of ellipsoids, considered earlier in a number of works by the author. A variety of ellipsoids is studied when the ends of the coordinate vectors coincide with the focal points, and the first coordinate straight line describes a cylindrical surface, while on the generating element there are at least three focal points that do not lie on one straight line and on one plane passing through center, and defining three conjugate directions. A complex of ellipsoids is distinguished from the indicated manifold provided that the indicatrices of the second and third coordinate vectors describe surfaces with tangent planes parallel to the third coordinate plane, and the end of the second coordinate vector describes a line with a tangent parallel to the first coordinate vector. An existence theorem for the variety under study is proved. The geometric properties of the complex under consideration are found. It is proved that the end of the

first coordinate vector, points of the first coordinate line, and also the first coordinate plane describe a two-parameter family of planes, the end of the third coordinate vector describes a two-parameter family of cylindrical planes, a point of the third coordinate plane describes a one-parameter family of lines with tangents parallel to the first coordinate vector. The characteristic manifold of a generating element consists of six points: the vertex of the frame, three ends of the coordinate vectors, and two ends: the sum of the first and second coordinate vectors, as well as the sum of the first and third coordinate vectors. The focal manifold of the ellipsoid, the complex under study, consists of only three points, which are the ends of the coordinate vectors.

*Keywords:* complex, congruence, frame, ellipsoid, affine space, vector indicatrix, characteristic manifold, focal manifold.

*References*

1. *Kretov, M. V.:* Complexes of ellipsoids in affine space. *DGMF*. Kaliningrad. **10**, 41—47 (1979).
2. *Kretov, M. V.:* On complexes of central quadrics in an affine space. *DGMF*. Kaliningrad. **11**, 51—60 (1980).
3. *Kretov, M. V.:* On a three-parameter family of quadrics in an affine space. *IKRGU's Vestnik. Ser. Physics, Mathematics, and Technology*, **10**, 95—98 (2008).
4. *Kretov, M. V.:* Three-parameter family of ellipsoids that can be constructed. *IKBFU's Vestnik. Ser. Physics, Mathematics, and Technology*, **10**, 68—71 (2014).
5. *Kretov, M. V.:* On the fields of geometric objects associated with a complex of central nondegenerate hyperquadrics. *IKBFU's Vestnik. Ser. Physics, Mathematics, and Technology*, **10**, 76—80 (2015).
6. *Malakhovsky, V. S., Makhorkin, V. V.:* Differential geometry of manifolds of hyperquadrics in an n-dimensional projective space. *Tr. Geom. Sem*. **6**, 113—133 (1974).
7. *Malakhovsky, V. S.:* Introduction to the theory of external forms. Kaliningrad (1978).
8. *Malakhovsky, V. S.:* A short course in differential geometry. Kaliningrad (2010).