ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР.
Вып.I0 1970

УДК 513.73

Е.К. Сельдюков

ГЕОМЕТРИЯ СЕТЕЙ, ИНВАРИАНТНО ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ЗАДАННЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ СЕТЯМ НА V_p В E_n.

I. На p-мерной поверхности V_p пространства E_n зададим несколько семейств гладких линий. Эти семейства определяют на V_p систему скалярных функций (например, нормальная $\mathcal{K}_{N(i)}$ или геодезическая $\mathcal{K}_{T(i)}$ кривизна линий семейства) – систему инвариантов. Каждая такая функция f, отличная от постоянной, задает на поверхности семейство подмногообразий $f=const$. p различных семейств таких подмногообразий определяют сеть на поверхности V_p.

2. Если на поверхности задана сеть Σ_p, то можно для k семейств линий сети выбрать инвариант f, а для $p-k=\ell$ семейств линий – другой инвариант φ. В общем случае получаем p семейств подмногообразий, а следовательно, новую сеть на V_p.

Рассмотрим случай ортогональной сети. В качестве инвариантов будем использовать нормальную и геодезическую кривизну линий данной сети. Присоединим к поверхности V_p подвижной ортогональный репер, у которого векторы $\vec{e}_i$ $(i=1,\dots,p)$ взяты на касательных к линиям данной сети в точке x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha=p+1,\dots,n)$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения $N_{n-p}(x)$ касательной плоскости $T_p(x)$, причем векторы $\vec{e}_a$ $(a=p+1,\dots,p+q)$ расположены в главной нормали $N_q(x)$ поверхности. Тогда инфинитезимальные перемещения репера определяются системой уравнений [2]

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i\,,\quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^a\vec{e}_a\,,$$

$$d\bar{e}_a=\omega_a^i\bar{e}_i+\omega_a^b\bar{e}_b+\omega_a^\sigma\bar{e}_\sigma\,,$$

$$d\bar{e}_\sigma=\omega_\sigma^a\bar{e}_a+\omega_\sigma^s\bar{e}_s\quad(\sigma,s=p+q+1,\dots,n).$$

Здесь $\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j$, где $b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha$, причем $b_{ij}^\sigma=0$, а так как векторы $\bar{e}_i$ репера взяты на касательных к линиям сети в точке x, то формы ω_i^j $(i\neq j)$ – главные, то есть $\omega_i^j=a_{ik}^j\omega^k$, где a_{ik}^j – инварианты сети. В силу ортонормированности репера имеем

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0,\quad \omega_\alpha^\beta+\omega_\beta^\alpha=0,\quad \omega_i^\alpha+\omega_\alpha^i=0.$$

Дифференцируя уравнение $\mathcal{K}_{N(i)}=const$, находим дифференциальное уравнение поверхности $\bar{V}_{p-1}^i$, присоединенной к i-й линии сети в точке x:

$$\bar{p}_{ik}\,\omega^k=0,$$

где $$\bar{p}_{ik}=\sum_a\left[b_{ii}^a\left(b_{iik}^a+2b_{ij}^a a_{ik}^j\right)\right].$$

Аналогично, дифференцируя уравнение $\mathcal{K}_{T(i)}=const$, получаем дифференциальное уравнение поверхности $\hat{V}_{p-1}^i$, присоединенной к i-й линии сети в точке x:

$$\hat{p}_{ik}\,x^k=0,$$

где

$$\hat{p}_{ik}=\sum_j\left[a_{ii}^j\left(a_{iik}^j+a_{il}^j a_{ik}^l+\sum_a b_{ii}^a b_{jk}^a\right)\right].$$

Вектор $\bar{N}_i(\hat{N}_i)$ в пространстве E_p (i – фиксировано) с координатами $\bar{p}_{ik}(\hat{p}_{ik})$ есть вектор нормали поверхности $\bar{V}_{p-1}(\hat{V}_{p-1}^i)$. Доказано, что величины $\bar{p}_{ik}$ и $\hat{p}_{ik}$ являются абсолютными инвариантами сети.

Доказано также, что $\bar{p}_{ik}=\bar{b}_{ii}\cdot\bar{b}_{iik}$ $(\hat{p}_{ik}=\bar{a}_{ii}\cdot\bar{a}_{iik})$, где через $\bar{b}_{iik}$ $(\bar{a}_{iik})$ обозначена производная вектора нормальной (геодезической) кривизны в направлении линии ω^k

3. Рассмотрим геометрические свойства поверхностей $\overline{V}^{i}_{p-1}$ и V^{i}_{p-1}.

Пусть F^{i}_{k} -псевдофокусы касательной $[x, \overline{e}_{k}]$, а $\widetilde{F}^{i}_{k}$ - точки, инверсные к псевдофокусам относительно сферы $S(x,1)$. Справедлива

Т е о р е м а. Для любой точки поверхности $\hat{V}^{i}_{p-1}$ длина диагонали $(p-1)$-мерного прямоугольного параллелепипеда, построенного на точках $x, \widetilde{F}^{i}_{j_1}, \widetilde{F}_{j_2}, \ldots, \widetilde{F}^{i}_{j_{p-1}}$ (все значения $i, j_1, \ldots, j_{p-1}$ различны), равна $\mathcal{K}_{T(i)}$.

Введем понятие, аналогичное понятию псевдофокуса, но в главной нормали. Для произвольной точки $\overline{y} = \overline{x} + y^{\alpha}\overline{e}_{\alpha}$, принадлежащей главной нормали, потребуем, чтобы $d\overline{y} \in [x, \overline{e}_1, \ldots \ldots \overline{e}_{\ell-1}, \overline{e}_{\ell+1}, \ldots, \overline{e}_n]$, когда точка x смещается по линии ω^{ℓ}. При фиксированном ℓ получаем, что y^{a} должны удовлетворять уравнению $\sum\limits_{a} b^{a}_{\ell\ell} y^{a} - 1$. Это есть уравнение плоскости размерности $q-1$, расположенной в $N_q(x)$. Для всей сети Σ_p $(\ell = 1, 2, \ldots, p)$ в главной нормали получим p таких плоскостей. На прямой $[x, \overline{e}_a]$ рассмотрим p точек $\mathcal{F}^{i}_{a}$ пересечения этой прямой с полученными плоскостями. Пусть $\widetilde{\mathcal{F}}^{i}_{a}$ - точки, инверсные к этим точкам относительно сферы $S(x,1)$. Тогда справедлива

Т е о р е м а. Для любой точки поверхности $\overline{V}^{i}_{p-1}$ длина диагонали q-мерного прямоугольного параллелепипеда, построенного на точках x, $\widetilde{\mathcal{F}}^{i}_{a}$ $(a = p+1, \ldots, p+q)$, равна $\mathcal{K}_{N(i)}$.

Интересен случай, когда сеть Σ_p есть сеть линий кривизны относительно одномерной нормали [1]. В этом случае справедлива

Т е о р е м а. Для любой точки поверхности $\overline{V}_{p-1}$ расстояние от точки x до касательной плоскости к присоединенной поверхности в точке A_i (точка A_i лежит на одномерной нормали и соответствует смещению вдоль i-й линии сети Σ_p) равно $\dfrac{1}{\mathcal{K}_{N(i)}}$.

4. Рассмотрим ортогональную сеть Σ_p и выберем $\overline{p} + \hat{p} = p$ линий этой сети (в частности, $\overline{p}$ или $\hat{p}$ может быть равно нулю). Пусть индекс $\overline{i}$ принимает $\overline{p}$ значений из множества $\{1, 2, \ldots, p\}$, а индекс $\hat{i}$ - $\hat{p}$ значений из того же множества. Тогда система уравнений

$$\sum_{a} [b^{a}_{\overline{i}\overline{i}} (b^{a}_{\overline{i}\overline{i}k} + 2 b^{a}_{\overline{i}j} a^{j}_{\overline{i}k})] \omega^{k} = 0,$$

$$\sum_{j} [a^{j}_{\hat{i}\hat{i}} (a^{j}_{\hat{i}\hat{i}k} + a^{j}_{\hat{i}\ell} a^{\ell}_{\hat{i}k} + \sum_{a} b^{a}_{\hat{i}\hat{i}} b_{jk})] \omega^{k} = 0$$

задает голономную сеть $\hat{\overline{\Sigma}}_p$ на поверхности V_p. Если $\hat{p} = 0$ $(\overline{p} = 0)$, то будем обозначать новую сеть $\overline{\Sigma}_p$ $(\hat{\Sigma}_p)$. Пусть

$$p_{ik} = \begin{cases} \overline{p}_{\overline{i}k}, & \text{если } i = \overline{i}, \\ \overline{p}_{\hat{i}k}, & \text{если } i = \hat{i}. \end{cases}$$

Обозначим матрицу $\| p_{ik} \|$ через A, а алгебраическое дополнение элемента p_{ik} определителя $|A|$ через β^{k}_{i}. Тогда уравнение i-й линии сети можно записать в виде

$$\frac{\omega^1}{\beta^1_i} = \frac{\omega^2}{\beta^2_i} = \ldots = \frac{\omega^p}{\beta^p_i}.$$

Сеть $\hat{\overline{\Sigma}}_p$ существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

5. Перейдем к реперу, первые p векторов $\overline{e}'_i$ которого построены на касательных к линиям новой сети, а остальные совпадают с $\overline{e}_{\alpha}$. Тогда $\overline{e}'_i = \dfrac{\beta^{k}_{i}}{|A|} \overline{e}_k$. Вектор $\overline{e}'_i$ (при фиксированном i) можно интерпретировать как векторное произведение $p-1$ векторов $\overline{n}_{i'} = \sum\limits_{k} p_{i'k} \overline{e}_k$ $(i' = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, p)$ в пространстве E_p, где $\overline{n}_i$ -векторы нормалей поверхностей $\overline{V}^{i'}_{p-1}$, $\hat{V}^{i'}_{p-1}$.

Пусть $d\overline{x} = \theta^{i} \overline{e}'_i$. Обозначим $\dfrac{\beta^{k}_{i}}{|A|}$ через B^{k}_{i}. Тогда $\theta^{i} = p_{ik} \omega^{k}$, причем $\| \widetilde{B}^{i}_{k} \| = \| p_{ik} \|$, где $\| \widetilde{B}^{i}_{k} \|$-матрица, обратная матрице $\| B^{k}_{i} \|$.

Имеем

$$d\overline{e}'_i = \theta^{j}_{i} \overline{e}'_j + \theta^{a}_{i} \overline{e}_a,$$

где $\theta^{j}_{i} = \hat{a}^{j}_{ik} \theta^{k}$, а $\theta^{a}_{i} = b^{a}_{ij} \theta^{j}$. Так как $\mathcal{D}\theta^{i} = 0$, то

$$d\widetilde{B}^{i}_{j} \wedge \omega^{j} - \widetilde{B}^{i}_{k} \omega^{k}_{j} \wedge \omega^{j} = 0. \qquad (*)$$

Раскрывая ($*$) по лемме Картана, будем иметь:

$$d\widetilde{B}^i_j - \widetilde{B}^i_k \omega^k_j = t^i_{j\ell}\omega^\ell \text{ , где } t^i_{j\ell} = t^i_{\ell j} .$$

Доказано, что

$$\hat{\hat{b}}{}^a_{ij} = B^k_i B^\ell_j b^a_{k\ell} ,$$

$$\hat{a}^j_{ik} = -B^\ell_i B^m_k t^j_{\ell m} .$$

Если обозначим $\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j$ через $\hat{\gamma}_{ij}$, то $\hat{\gamma}_{ij} = \sum_k B^k_i B^k_j$.

6. Рассмотрим случай, когда матрица $\mathcal{A}$ ортогональная. В этом случае V_2 налагается на плоскость, а на p -мерной поверхности новая сеть будет геодезической. Кроме того, на V_p в E_n новая сеть будет чебышевской тогда и только тогда, когда она получебышевская (то есть достаточно, чтобы $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ векторов $\vec{a}_{12}, \ldots, \vec{a}_{1p-1}, \vec{a}_{23}, \ldots, \vec{a}_{2p-1}, \ldots, \vec{a}_{p-2p-1}$ из векторов $\vec{a}_{ij}$ при $i \neq j$ были равны нулю).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б а з ы л е в В.Т. Об одном свойстве геодезических линий на многомерных поверхностях.- Уч.записки МГПИ им. В.И.Ленина, 1, № 374, 1970, с.41-52.

2. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве.- Лит.матем.сб., 6, № 4, 1966, с.475-491.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.10 1979

УДК 513.73

Е.В.С к р ы д л о в а

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ КВАДРИКОЙ И ПРЯМОЙ

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрим частный класс вырожденных [1] конгруэнций $(QL)_{1,2}$, порожденных квадрикой Q, описывающей однопараметрическое семейство, и прямой L, описывающей конгруэнцию.

Вырожденные конгруэнции $(QL)_{1,2}$ характеризуются небиективным отображением, ставящим в соответствие каждой прямой L единственную квадрику Q, полным прообразом которой является некоторое однопараметрическое семейство $(L)_Q$ прямых L.

Изучение конгруэнции $(QL)_{1,2}$ проводится в подвижном репере $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, в котором вершины A_3 и A_4 являются точками пересечения прямой L с соответствующей ей квадрикой Q, а вершины A_1 и A_2 полярно сопряжены им и также принадлежат квадрике.

Уравнение квадрики Q и система пфаффовых уравнений конгруэнции $(QL)_{1,2}$ относительно выбранного репера, с учетом определенной нормировки вершин, могут быть записаны соответственно в виде:

$$x^1x^2 + x^3x^4 = 0 , \tag{1}$$

$$\begin{gathered}
\omega^j_i = \Gamma^j_i \omega^3_4 , \;\; \omega^4_3 = \Gamma^4_3 \omega^3_4 , \;\; \omega^3_4 = \lambda_k \omega^k , \\
\omega^3_i = \Gamma^3_i \omega^3_4 - \omega^j_4 , \quad \omega^4_i = \Gamma^4_i \omega^3_4 - \omega^j , \\
\omega^i_4 = \Gamma^i_{4k}\omega^k , \;\; \omega^1_1 + \omega^2_2 - \omega^3_3 - \omega^4_4 = b\,\omega^3_4
\end{gathered} \tag{2}$$