2. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Лаптев Г. Ф.* О выделении одного класса внутренних геометрий, индуцированных на поверхности пространства аффинной связности // ДАН СССР. 1943. Т. 41. №8. С. 329—331.

4. *Столяров А. В.* Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Чебоксары, 2005. №4. С. 21—27.

5. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

6. *Столяров А. В*. Пространство проективно-метрической связности // Изв. вузов. Математика. 2003. №11. С. 70—76.

T. Alenina

REGULAR HYPERBAND DICTRIBUTION
IN THE SPACE OF AFFINE-METRIC CONNECTION

The work is devoted to studying the dual spaces of affine-metric connection on the regular hyperband distribution of m-dimensional line elements H in the space of affine-metric connection.

УДК 514.75

О. О. Белова

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ СВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕНИИ НАД ГРАССМАНОПОДОБНЫМ МНОГООБРАЗИЕМ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Рассмотрены четыре основных способа продолжений уравнений грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей и один обобщающий способ. Найдены структурные уравнения форм групповой связности в главном расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием. Получены выражения объекта кривизны групповой связности через компоненты объекта связности, фундаментального объекта 1-го порядка и пфаффовы производные компонент данных объектов. Показано, что в каждом из основных случаев объект кривизны связности является тензором, содержащим 2 простейших и 2 простых подтензора. При использовании обобщающего способа в дифференциальных уравнениях компонент объекта кривизны появляется тензор, названный виртуальным, поскольку он обращается в нуль в основных случаях.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ ($I, ... = \overline{1, n}$), инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами [1]

$$dA = \theta A + \omega^I A_I,$$
$$dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A,$$

причем формы Пфаффа $\omega^I, \omega_I, \omega_J^I$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана для проективной группы GP(n)

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \;\; D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$
$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \qquad (1)$$

В пространстве P_n рассмотрим грассманоподобное многообразие $Gr^*(m, n)$ [2] центрированных m-мерных плоскостей L_m^*. Грассманоподобное многообразие $Gr^*(m, n)$ центрированных плоскостей имеет размерность (m+1)(n–m), совпадающую с размерностью многообразия Грассмана $Gr(m, n)$.

При помещении вершин A, A_a на плоскость L_m^* и фиксации центра A ($a, ... = \overline{1, m}$; $\alpha, ... = \overline{m+1, n}$) уравнения грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей выглядят следующим образом:

$$\omega^a = \Lambda^a_\alpha \omega^\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega^\alpha_b, \qquad (2)$$

где $\Lambda = \{\Lambda^a_\alpha, \Lambda^{ab}_\alpha\}$ — фундаментальный объект 1-го порядка многообразия $V^* = Gr^*(m,n)$. Дифференцируя уравнения (2) внешним образом, получим

$$\begin{aligned}(\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha) \wedge \omega^\alpha + \Delta\Lambda^{ab}_\alpha \wedge \omega^\alpha_b + \Lambda^a_\alpha \Lambda^b_\beta \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_b + \\ + \Lambda^a_\alpha \Lambda^{bc}_\beta \omega^\beta_c \wedge \omega^\alpha_b = 0,\end{aligned} \qquad (3)$$

где, например,

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha = d\Lambda^{ab}_\alpha + \Lambda^{cb}_\alpha \omega^a_c + \Lambda^{ac}_\alpha \omega^b_c - \Lambda^{ab}_\beta \omega^\beta_\alpha .$$

В равенствах (3) можно группировать слагаемые четырьмя основными способами.

Способ 1.

$$(\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha - \Lambda^a_\beta \Lambda^b_\alpha \omega^\beta_b) \wedge \omega^\alpha + (\Delta\Lambda^{ab}_\alpha + \Lambda^a_\alpha \Lambda^{bc}_\beta \omega^\beta_c) \wedge \omega^\alpha_b = 0.$$

Разрешаем по лемме Картана:

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha - \Lambda^a_\beta \Lambda^b_\alpha \omega^\beta_b = \Lambda 1^a_{\alpha\beta} \omega^\beta + \Lambda 1^{ab}_{\alpha\beta} \omega^\beta_b, \qquad (4_1)$$

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha + \Lambda^a_\alpha \Lambda^{bc}_\beta \omega^\beta_c = \overline{\Lambda} 1^{ab}_{\alpha\beta} \omega^\beta + \Lambda 1^{abc}_{\alpha\beta} \omega^\beta_c, \qquad (5_1)$$

причем выполняются условия симметрии

$$\Lambda I^a_{[\alpha\beta]} = 0, \ \Lambda I^{ab}_{\alpha\beta} - \overline{\Lambda} I^{ab}_{\beta\alpha} = 0, \ \Lambda I^{a\begin{bmatrix} bc \\ \alpha\beta \end{bmatrix}} = 0, \qquad (6)$$

где $I = \overline{1,4}$ и квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам или их парам.

В уравнениях (4_1, 5_1) переносим слагаемые, содержащие базисные формы, в правую часть

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha = \Lambda 1^a_{\alpha\beta} \omega^\beta + (\Lambda 1^{ab}_{\alpha\beta} + \Lambda^a_\beta \Lambda^b_\alpha) \omega^\beta_b, \qquad (4'_1)$$

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha = \overline{\Lambda} 1^{ab}_{\alpha\beta} \omega^\beta + (\Lambda 1^{abc}_{\alpha\beta} - \Lambda^a_\alpha \Lambda^{bc}_\beta) \omega^\beta_c . \qquad (5'_1)$$

Продолжая эти уравнения, получим

$$\Delta\Lambda1^{a}_{\alpha\beta}+(\Lambda1^{ab}_{\alpha\beta}+\bar{\Lambda}1^{ab}_{\alpha\beta})\omega_b\equiv 0,$$
$$\Delta\Lambda1^{ab}_{\alpha\beta}+(\Lambda1^{acb}_{\alpha\beta}-\Lambda^{c}_{\alpha}\Lambda^{ab}_{\beta}-\Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{cb}_{\beta}-\Lambda^{b}_{\alpha}\Lambda^{ac}_{\beta}-\Lambda^{a}_{\beta}\Lambda^{bc}_{\alpha})\omega_c+$$
$$+(\delta^{\gamma}_{\beta}\Lambda^{ab}_{\alpha}-\delta^{\gamma}_{\alpha}\Lambda^{ab}_{\beta})\omega_\gamma\equiv 0,$$
$$\Delta\bar{\Lambda}1^{ab}_{\alpha\beta}+(\Lambda1^{abc}_{\alpha\beta}-\Lambda^{c}_{\beta}\Lambda^{ab}_{\alpha}-\Lambda^{a}_{\beta}\Lambda^{cb}_{\alpha}-\Lambda^{b}_{\beta}\Lambda^{ac}_{\alpha}-\Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{bc}_{\beta})\omega_c+ \qquad (7_1)$$
$$+(\delta^{\gamma}_{\alpha}\Lambda^{ab}_{\beta}-\delta^{\gamma}_{\beta}\Lambda^{ab}_{\alpha})\omega_\gamma\equiv 0,$$
$$\Delta\Lambda1^{abc}_{\alpha\beta}-(\Lambda^{eb}_{\alpha}\Lambda^{ac}_{\beta}+\Lambda^{ab}_{\alpha}\Lambda^{ec}_{\beta})\omega_e+(\delta^{c}_{e}\Lambda^{ab}_{\beta}+\delta^{a}_{e}\Lambda^{bc}_{\beta})\omega^{e}_{\alpha}+$$
$$+(\delta^{a}_{e}\Lambda^{cb}_{\alpha}+\delta^{b}_{e}\Lambda^{ac}_{\alpha})\omega^{e}_{\beta}\equiv 0,$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^{α}, ω^{α}_{b}.

Способ 2.

$$(\Delta\Lambda^{a}_{\alpha}+\Lambda^{ab}_{\alpha}\omega_b+\omega^{a}_{\alpha})\wedge\omega^{\alpha}+(\Delta\Lambda^{ab}_{\alpha}+\Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{b}_{\beta}\omega^{\beta}+\Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{bc}_{\beta}\omega^{\beta}_{c})\wedge\omega^{\alpha}_{b}=0.$$

Разрешаем по лемме Картана:

$$\Delta\Lambda^{a}_{\alpha}+\Lambda^{ab}_{\alpha}\omega_b+\omega^{a}_{\alpha}=\Lambda2^{a}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}+\Lambda2^{ab}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{b}, \qquad (4_2)$$
$$\Delta\Lambda^{ab}_{\alpha}+\Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{b}_{\beta}\omega^{\beta}+\Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{bc}_{\beta}\omega^{\beta}_{c}=\bar{\Lambda}2^{ab}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}+\Lambda2^{abc}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{c}, \qquad (5_2)$$

причем справедливы условия (6) при I=2. Преобразуем уравнения (5_2)

$$\Delta\Lambda^{ab}_{\alpha}=(\bar{\Lambda}2^{ab}_{\alpha\beta}-\Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{b}_{\beta})\omega^{\beta}+(\Lambda2^{abc}_{\alpha\beta}-\Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{bc}_{\beta})\omega^{\beta}_{c}. \qquad (5'_2)$$

Продолжая уравнения (4_2), $(5'_2)$, получим

$$\Delta\Lambda2^{a}_{\alpha\beta}+(\Lambda2^{ab}_{\alpha\beta}+\bar{\Lambda}2^{ab}_{\alpha\beta}-\Lambda^{a}_{\beta}\Lambda^{b}_{\alpha}-\Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{b}_{\beta})\omega_b\equiv 0,$$
$$\Delta\Lambda2^{ab}_{\alpha\beta}+(\Lambda2^{acb}_{\alpha\beta}-\Lambda^{c}_{\alpha}\Lambda^{ab}_{\beta}-\Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{cb}_{\beta})\omega_c+(\delta^{\gamma}_{\beta}\Lambda^{ab}_{\alpha}-\delta^{\gamma}_{\alpha}\Lambda^{ab}_{\beta})\omega_\gamma+$$
$$+\Lambda^{b}_{\alpha}\omega^{a}_{\beta}+\Lambda^{a}_{\beta}\omega^{b}_{\alpha}\equiv 0,$$
$$\Delta\bar{\Lambda}2^{ab}_{\alpha\beta}+(\Lambda2^{abc}_{\alpha\beta}-\Lambda^{c}_{\beta}\Lambda^{ab}_{\alpha}-\Lambda^{a}_{\beta}\Lambda^{cb}_{\alpha})\omega_c+(\delta^{\gamma}_{\alpha}\Lambda^{ab}_{\beta}-\delta^{\gamma}_{\beta}\Lambda^{ab}_{\alpha})\omega_\gamma+ \qquad (7_2)$$
$$+\Lambda^{b}_{\beta}\omega^{a}_{\alpha}+\Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{b}_{\beta}\equiv 0,$$
$$\Delta\Lambda2^{abc}_{\alpha\beta}-(\Lambda^{eb}_{\alpha}\Lambda^{ac}_{\beta}+\Lambda^{ab}_{\alpha}\Lambda^{ec}_{\beta})\omega_e+(\delta^{c}_{e}\Lambda^{ab}_{\beta}+\delta^{a}_{e}\Lambda^{bc}_{\beta})\omega^{e}_{\alpha}+$$
$$+(\delta^{a}_{e}\Lambda^{cb}_{\alpha}+\delta^{b}_{e}\Lambda^{ac}_{\alpha})\omega^{e}_{\beta}\equiv 0.$$

Способ 3.

$$(\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha\omega_b + \omega^a_\alpha - \Lambda^a_\beta\Lambda^b_\alpha\omega^\beta_b)\wedge\omega^\alpha + (\Delta\Lambda^{ab}_\alpha - \Lambda^a_\beta\Lambda^{cb}_\alpha\omega^\beta_c)\wedge\omega^\alpha_b = 0.$$

Разрешаем:

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha\omega_b + \omega^a_\alpha - \Lambda^a_\beta\Lambda^b_\alpha\omega^\beta_b = \Lambda 3^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda 3^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b, \qquad (4_3)$$

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha - \Lambda^a_\beta\Lambda^{cb}_\alpha\omega^\beta_c = \overline{\Lambda}3^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda 3^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\beta_c, \qquad (5_3)$$

причем выполняются условия (6) при I=3. Преобразуем уравнения $(4_3, 5_3)$

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha\omega_b + \omega^a_\alpha = \Lambda 3^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + (\Lambda 3^{ab}_{\alpha\beta} + \Lambda^a_\beta\Lambda^b_\alpha)\omega^\beta_b,$$

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha = \overline{\Lambda}3^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta + (\Lambda 3^{abc}_{\alpha\beta} + \Lambda^a_\beta\Lambda^{cb}_\alpha)\omega^\beta_c.$$

Продолжаем эти уравнения:

$$\begin{aligned}
&\Delta\Lambda 3^a_{\alpha\beta} + (\Lambda 3^{ab}_{\alpha\beta} + \overline{\Lambda}3^{ab}_{\alpha\beta})\omega_b \equiv 0,\\
&\Delta\Lambda 3^{ab}_{\alpha\beta} + (\Lambda 3^{acb}_{\alpha\beta} - \Lambda^c_\alpha\Lambda^{ab}_\beta - \Lambda^b_\alpha\Lambda^{ac}_\beta)\omega_c + (\delta^\gamma_\beta\Lambda^{ab}_\alpha - \delta^\gamma_\alpha\Lambda^{ab}_\beta)\omega_\gamma \equiv 0,\\
&\Delta\overline{\Lambda}3^{ab}_{\alpha\beta} + (\Lambda 3^{abc}_{\alpha\beta} - \Lambda^c_\beta\Lambda^{ab}_\alpha - \Lambda^b_\beta\Lambda^{ac}_\alpha)\omega_c + (\delta^\gamma_\alpha\Lambda^{ab}_\beta - \delta^\gamma_\beta\Lambda^{ab}_\alpha)\omega_\gamma \equiv 0, \qquad (7_3)\\
&\Delta\Lambda 3^{abc}_{\alpha\beta} - (\Lambda^{eb}_\alpha\Lambda^{ac}_\beta + \Lambda^{ab}_\alpha\Lambda^{ec}_\beta - \Lambda^{ae}_\alpha\Lambda^{bc}_\beta - \Lambda^{ae}_\beta\Lambda^{cb}_\alpha)\omega_e + \Lambda^{ab}_\beta\omega^c_\alpha +\\
&+ \Lambda^{ac}_\alpha\omega^b_\beta \equiv 0.
\end{aligned}$$

Способ 4.

$$(\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha\omega_b + \omega^a_\alpha)\wedge\omega^\alpha + (\Delta\Lambda^{ab}_\alpha + \Lambda^a_\alpha\Lambda^b_\beta\omega^\beta - \Lambda^a_\beta\Lambda^{cb}_\alpha\omega^\beta_c)\wedge\omega^\alpha_b = 0.$$

Разрешаем:

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha\omega_b + \omega^a_\alpha = \Lambda 4^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda 4^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b, \qquad (4_4)$$

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha + \Lambda^a_\alpha\Lambda^b_\beta\omega^\beta - \Lambda^a_\beta\Lambda^{cb}_\alpha\omega^\beta_c = \overline{\Lambda}4^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda 4^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\beta_c, \qquad (5_4)$$

причем справедливы условия (6) при I=4. Преобразуем уравнения (5_4)

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha = (\overline{\Lambda}4^{ab}_{\alpha\beta} - \Lambda^a_\alpha\Lambda^b_\beta)\omega^\beta + (\Lambda 4^{abc}_{\alpha\beta} + \Lambda^a_\beta\Lambda^{cb}_\alpha)\omega^\beta_c. \qquad (5'_4)$$

Продолжая уравнения $(4_4, 5'_4)$, получим

$$\Delta\Lambda 4^a_{\alpha\beta} + (\Lambda 4^{ab}_{\alpha\beta} + \bar\Lambda 4^{ab}_{\alpha\beta} - \Lambda^a_\beta\Lambda^b_\alpha - \Lambda^a_\alpha\Lambda^b_\beta)\omega_b \equiv 0,$$
$$\Delta\Lambda 4^{ab}_{\alpha\beta} + (\Lambda 4^{acb}_{\alpha\beta} - \Lambda^c_\alpha\Lambda^{ab}_\beta + \Lambda^a_\beta\Lambda^{bc}_\alpha)\omega_c + (\delta^\gamma_\beta\Lambda^{ab}_\alpha - \delta^\gamma_\alpha\Lambda^{ab}_\beta)\omega_\gamma +$$
$$+ \Lambda^b_\alpha\omega^a_\beta + \Lambda^a_\beta\omega^b_\alpha \equiv 0,$$
$$\Delta\bar\Lambda 4^{ab}_{\alpha\beta} + (\Lambda 4^{abc}_{\alpha\beta} - \Lambda^c_\beta\Lambda^{ab}_\alpha + \Lambda^a_\alpha\Lambda^{bc}_\beta)\omega_c + (\delta^\gamma_\alpha\Lambda^{ab}_\beta - \delta^\gamma_\beta\Lambda^{ab}_\alpha)\omega_\gamma + \qquad (7_4)$$
$$+ \Lambda^b_\beta\omega^a_\alpha + \Lambda^a_\alpha\omega^b_\beta \equiv 0,$$
$$\Delta\Lambda 4^{abc}_{\alpha\beta} - (\Lambda^{eb}_\alpha\Lambda^{ac}_\beta + \Lambda^{ab}_\alpha\Lambda^{ec}_\beta + \Lambda^{ae}_\alpha\Lambda^{bc}_\beta + \Lambda^{ae}_\beta\Lambda^{cb}_\alpha)\omega_e + \Lambda^{ab}_\beta\omega^c_\alpha +$$
$$+ \Lambda^{ac}_\alpha\omega^b_\beta \equiv 0.$$

Обобщающий случай.

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha\omega_b + \omega^a_\alpha = \Lambda^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b,$$
$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha = \bar\Lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\beta_c,$$

где только $\Lambda^a_{[\alpha\beta]} = 0$. Продолжения имеют вид

$$\Delta\Lambda^a_{\alpha\beta} + (\Lambda^{ab}_{\alpha\beta} + \bar\Lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \Lambda^b_\alpha\Lambda^a_\beta)\omega_b \equiv 0,$$
$$\Delta\Lambda^{ab}_{\alpha\beta} + (\Lambda^{acb}_{\alpha\beta} - \Lambda^c_\alpha\Lambda^{ab}_\beta)\omega_c + (\delta^\gamma_\beta\Lambda^{ab}_\alpha - \delta^\gamma_\alpha\Lambda^{ab}_\beta)\omega_\gamma +$$
$$+ \Lambda^b_\alpha\omega^a_\beta + \Lambda^a_\beta\omega^b_\alpha \equiv 0,$$
$$\Delta\bar\Lambda^{ab}_{\alpha\beta} + (\Lambda^{abc}_{\alpha\beta} - \Lambda^c_\beta\Lambda^{ab}_\alpha - \Lambda^{cb}_\alpha\Lambda^a_\beta - \Lambda^b_\beta\Lambda^{ac}_\alpha)\omega_c + (\delta^\gamma_\alpha\Lambda^{ab}_\beta - \qquad (7_5)$$
$$- \delta^\gamma_\beta\Lambda^{ab}_\alpha)\omega_\gamma \equiv 0,$$
$$\Delta\Lambda^{abc}_{\alpha\beta} - (\Lambda^{eb}_\alpha\Lambda^{ac}_\beta + \Lambda^{ab}_\alpha\Lambda^{ec}_\beta + \Lambda^{ae}_\alpha\Lambda^{bc}_\beta)\omega_e + \Lambda^{ab}_\beta\omega^c_\alpha +$$
$$+ (\delta^a_e\Lambda^{cb}_\alpha + \delta^b_e\Lambda^{ac}_\alpha)\omega^e_\beta \equiv 0.$$

Утверждение. *Фундаментальный объект 1-го порядка* $\Lambda = \{\Lambda^a_\alpha, \Lambda^{ab}_\alpha\}$ *является квазитензором, содержащим тензор* $\{\Lambda^{ab}_\alpha\}$.

При указанной специализации подвижного репера структурные уравнения (1) принимают вид

$$
\begin{gathered}
D\omega^{\alpha}=\omega^{\beta}\wedge(\omega^{\alpha}_{\beta}+\Lambda^{a}_{\beta}\omega^{\alpha}_{a})+\omega^{\beta}_{b}\wedge\Lambda^{ab}_{\beta}\omega^{\alpha}_{a}\,,\\
D\omega^{\alpha}_{a}=\omega^{\beta}_{b}\wedge(\delta^{b}_{a}\omega^{\alpha}_{\beta}-\delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{b}_{a})-\omega^{\alpha}\wedge\omega_{a}\,;\\
D\omega^{a}_{b}=\omega^{c}_{b}\wedge\omega^{a}_{c}+\omega^{a}_{b\alpha}\wedge\omega^{\alpha}+\omega^{ac}_{b\alpha}\wedge\omega^{\alpha}_{c}\,,\\
D\omega^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma}+\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}\wedge\omega^{\gamma}+\omega^{\alpha a}_{\beta\gamma}\wedge\omega^{\gamma}_{a}\,,\qquad (8)\\
D\omega^{a}_{\alpha}=\omega^{b}_{\alpha}\wedge\omega^{a}_{b}+\omega^{\beta}_{\alpha}\wedge\omega^{a}_{\beta}+\omega^{a}_{\alpha\beta}\wedge\omega^{\beta}+\omega^{ab}_{\alpha\beta}\wedge\omega^{\beta}_{b}\,,\\
D\omega_{a}=\omega^{b}_{a}\wedge\omega_{b}+\omega^{\alpha}_{a}\wedge\omega_{\alpha}\,,\ D\omega_{\alpha}=\omega^{a}_{\alpha}\wedge\omega_{a}+\omega^{\beta}_{\alpha}\wedge\omega_{\beta}\,,
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\omega^{a}_{b\alpha}=\delta^{a}_{b}\Lambda^{c}_{\alpha}\omega_{c}+\delta^{a}_{b}\omega_{\alpha}+\Lambda^{a}_{\alpha}\omega_{b}\,,\ \omega^{ac}_{b\alpha}=\delta^{a}_{b}\Lambda^{ec}_{\alpha}\omega_{e}-\delta^{c}_{b}\omega^{a}_{\alpha}+\Lambda^{ac}_{\alpha}\omega_{b}\,,\\
\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\beta}\Lambda^{a}_{\gamma}\omega_{a}+\delta^{\alpha}_{\beta}\omega_{\gamma}+\delta^{\alpha}_{\gamma}\omega_{\beta}\,,\ \omega^{\alpha a}_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\beta}\Lambda^{ba}_{\gamma}\omega_{b}+\delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^{a}_{\beta}\,,\\
\omega^{a}_{\alpha\beta}=\Lambda^{a}_{\beta}\omega_{\alpha}\,,\ \omega^{ab}_{\alpha\beta}=\Lambda^{ab}_{\beta}\omega_{\alpha}\,.
\end{gathered}
$$

Структурные уравнения (8) показывают, что над многообразием V^* возникает главное расслоение $G^*(V^*)$, типовым слоем которого является подгруппа стационарности G^* центрированной плоскости L^*_m, причем

$$\dim G^*=m(m-n)+n(n+1).$$

Групповая связность в расслоении $G^*(V^*)$ задается способом Г. Ф. Лаптева [3] с помощью форм

$$
\begin{gathered}
\tilde\omega^{a}_{b}=\omega^{a}_{b}-\Gamma^{a}_{b\alpha}\omega^{\alpha}-L^{ac}_{b\alpha}\omega^{\alpha}_{c},\ \tilde\omega^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\alpha}_{\beta}-\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}-L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{a},\\
\tilde\omega^{a}_{\alpha}=\omega^{a}_{\alpha}-\Gamma^{a}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}-L^{ab}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{b},\ \tilde\omega_{a}=\omega_{a}-L_{a\alpha}\omega^{\alpha}-\Pi^{b}_{a\alpha}\omega^{\alpha}_{b},\qquad (9)\\
\tilde\omega_{\alpha}=\omega_{\alpha}-L_{\alpha\beta}\omega^{\beta}-\Pi^{a}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{a},
\end{gathered}
$$

где $\Gamma=\{\Gamma^{a}_{b\alpha},L^{ac}_{b\alpha},\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma},L^{\alpha a}_{\beta\gamma},\Gamma^{a}_{\alpha\beta},L^{ab}_{\alpha\beta},L_{a\alpha},\Pi^{b}_{a\alpha},L_{\alpha\beta},\Pi^{a}_{\alpha\beta}\}$ — объект групповой связности, компоненты которого удовлетворяют сравнениям, найденным в статье [2].

Подставляя дифференциальные уравнения компонент объекта Г в выражения внешних дифференциалов форм (9), получим структурные уравнения форм связности

$$D\tilde{\omega}^a_b = \tilde{\omega}^c_b \wedge \tilde{\omega}^a_c + R^a_{b\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + R^{ac}_{b\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta_c + R^{acd}_{b\alpha\beta}\omega^\alpha_c \wedge \omega^\beta_d,$$

$$D\tilde{\omega}^\alpha_\beta = \tilde{\omega}^\gamma_\beta \wedge \tilde{\omega}^\alpha_\gamma + R^a_{\beta\gamma\mu}\omega^\gamma \wedge \omega^\mu + R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^\gamma \wedge \omega^\mu_a + R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^\gamma_a \wedge \omega^\mu_b,$$

$$D\tilde{\omega}^a_\alpha = \tilde{\omega}^b_\alpha \wedge \tilde{\omega}^a_b + \tilde{\omega}^\beta_\alpha \wedge \tilde{\omega}^a_\beta + R^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + R^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_b +$$

$$+ R^{abc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta_b \wedge \omega^\gamma_c,$$

$$D\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}^b_a \wedge \tilde{\omega}_b + R_{a\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + K^b_{a\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta_b + K^{bc}_{a\alpha\beta}\omega^\alpha_b \wedge \omega^\beta_c,$$

$$D\tilde{\omega}_\alpha = \tilde{\omega}^a_\alpha \wedge \tilde{\omega}_a + \tilde{\omega}^\beta_\alpha \wedge \tilde{\omega}_\beta + R_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + K^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_a +$$

$$+ K^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta_a \wedge \omega^\gamma_b,$$

где компоненты $R^a_{b\alpha\beta}, R^{ac}_{b\alpha\beta}, R^{acd}_{b\alpha\beta}, R^\alpha_{\beta\gamma\mu}, R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}, R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}, R^a_{\alpha\beta\gamma}, R^{ab}_{\alpha\beta\gamma}, R^{abc}_{\alpha\beta\gamma}$, $R_{a\alpha\beta}, K^b_{a\alpha\beta}, K^{bc}_{a\alpha\beta}, R_{\alpha\beta\gamma}, K^a_{\alpha\beta\gamma}, K^{ab}_{\alpha\beta\gamma}$ объекта кривизны R групповой связности Г выражаются по формулам:

$$R^a_{b\alpha\beta} = \Gamma^a_{b[\alpha\beta]} + \Gamma^a_{c[\alpha}\Gamma^c_{b\beta]},$$

$$R^{ac}_{b\alpha\beta} = \Gamma^{ac}_{b\alpha\beta} - L^{ac}_{b\beta\alpha} - \Gamma^a_{b\beta}\Lambda^c_\alpha + \Gamma^a_{d\alpha}L^{dc}_{b\beta} - L^{ac}_{d\beta}\Gamma^c_{b\alpha},$$

$$R^{acd}_{b\alpha\beta} = L^a_b\left[\begin{smallmatrix} cd \\ \alpha\beta \end{smallmatrix}\right] + \Gamma^a_{b\underline{|\alpha}}\Lambda^{\overline{|cd}}_{\beta}\Big] + L^a_e\left[\begin{smallmatrix} c \\ \alpha \end{smallmatrix} L^{ed}_{b\beta}\right],$$

$$R^a_{b\alpha\beta} = \Gamma^a_{b[\alpha\beta]} + \Gamma^a_{c[\alpha}\Gamma^c_{b\beta]},$$

$$R^{ac}_{b\alpha\beta} = \Gamma^{ac}_{b\alpha\beta} - L^{ac}_{b\beta\alpha} - \Gamma^a_{b\beta}\Lambda^c_\alpha + \Gamma^a_{d\alpha}L^{dc}_{b\beta} - L^{ac}_{d\beta}\Gamma^d_{b\alpha},$$

$$R^{acd}_{b\alpha\beta} = L^a_b\left[\begin{smallmatrix} cd \\ \alpha\beta \end{smallmatrix}\right] + \Gamma^a_{b\underline{|\alpha}}\Lambda^{\overline{|c}d}_{\beta}\Big] + L^a_e\left[\begin{smallmatrix} c \\ \alpha \end{smallmatrix} L^{ed}_{b\beta}\right],$$

$$R^\alpha_{\beta\gamma\mu} = \Gamma^\alpha_{\beta[\gamma\mu]} - \Gamma^\eta_{\beta[\gamma}\Gamma^\alpha_{\eta\mu]},$$

$$R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} - L^{\alpha a}_{\beta\mu\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Lambda^a_\gamma + L^{\eta a}_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\eta\gamma} - \Gamma^\eta_{\beta\gamma}L^{\alpha a}_{\eta\mu},$$

$$R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} = L^\alpha_\beta\left[\begin{smallmatrix} ab \\ \gamma\mu \end{smallmatrix}\right] + \Gamma^\alpha_{\beta\underline{|\gamma}}\Lambda^{\overline{|ab}}_{\mu}\Big] - L^\eta_\beta\left[\begin{smallmatrix} a \\ \gamma \end{smallmatrix} L^{\alpha b}_{\eta\mu}\right],$$

$$R^a_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma^a_{\alpha[\beta\gamma]} - \Gamma^b_{\alpha[\beta}\Gamma^a_{b\gamma]} - \Gamma^\mu_{\alpha[\beta}\Gamma^a_{\mu\gamma]},$$

$$R^{ab}_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma^{ab}_{\alpha\beta\gamma} - L^{ab}_{\alpha\gamma\beta} - \Gamma^a_{\alpha\gamma}\Lambda^b_\beta - \Gamma^c_{\alpha\beta}L^{ab}_{c\gamma} + L^{cb}_{\alpha\gamma}\Gamma^a_{c\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}L^{ab}_{\mu\gamma} + L^{\mu b}_{\alpha\gamma}\Gamma^a_{\mu\beta},$$

$$R^{abc}_{\alpha\beta\gamma} = L^a_\alpha\left[\begin{smallmatrix} bc \\ \beta\gamma \end{smallmatrix}\right] + \Gamma^a_{\alpha\underline{|\beta}}\Lambda^{\overline{|bc}}_{\gamma}\Big] - L^d_\alpha\left[\begin{smallmatrix} b \\ \beta \end{smallmatrix} L^{ac}_{d\gamma}\right] - L^\mu_\alpha\left[\begin{smallmatrix} b \\ \beta \end{smallmatrix} L^{ac}_{\mu\gamma}\right],$$

$$R_{a\alpha\beta}=L_{a[\alpha\beta]}-\Gamma^{b}_{a[\alpha}L_{b\beta]},$$

$$K^{b}_{a\alpha\beta}=L^{b}_{a\alpha\beta}-\Pi^{b}_{a\beta\alpha}-L_{a\beta}\Lambda^{b}_{\alpha}+L^{cb}_{a\beta}L_{c\alpha}-\Gamma^{c}_{a\alpha}\Pi^{b}_{c\beta},$$

$$K^{bc}_{a\alpha\beta}=\Pi_{a}\Big[{}^{bc}_{\alpha\beta}\Big]+L_{a\lfloor\alpha}\Lambda^{\ulcorner bc}_{\beta}\Big]-L^{e}_{a}\Big[{}^{b}_{\alpha}\Pi^{c}_{e\beta}\Big],$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}=L_{\alpha[\beta\gamma]}-\Gamma^{a}_{\alpha[\beta}L_{a\gamma]}-\Gamma^{\mu}_{\alpha[\beta}L_{\mu\gamma]},$$

$$K^{a}_{\alpha\beta\gamma}=L^{a}_{\alpha\beta\gamma}-\Pi^{a}_{\alpha\gamma\beta}-L_{\alpha\gamma}\Lambda^{a}_{\beta}-\Gamma^{b}_{\alpha\beta}\Pi^{a}_{b\gamma}+L_{b\beta}L^{ba}_{\alpha\gamma}+L^{\mu a}_{\alpha\gamma}L_{\mu\beta}-\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Pi^{a}_{\mu\gamma},$$

$$K^{ab}_{\alpha\beta\gamma}=\Pi_{\alpha}\Big[{}^{ab}_{\beta\gamma}\Big]+L_{\alpha\lfloor\beta}\Lambda^{\ulcorner ab}_{\gamma}\Big]-L^{c}_{\alpha}\Big[{}^{a}_{\beta}\Pi^{b}_{c\gamma}\Big]-L^{\mu}_{\alpha}\Big[{}^{a}_{\beta}\Pi^{b}_{\mu\gamma}\Big].$$

При нахождении дифференциальных сравнений для компонент объекта кривизны R групповой связности Г используются продолжения уравнений компонент объекта связности Г, сравнения (7) и учитываются условия симметрии (6). Эти сравнения для случаев 1—4 имеют вид

$$\Delta R^{a}_{b\alpha\beta}+R^{ac}_{b[\alpha\beta]}\omega_{c}\equiv 0,\quad \Delta R^{ac}_{b\alpha\beta}+2R^{adc}_{b\alpha\beta}\omega_{d}\equiv 0,\quad \Delta R^{acd}_{b\alpha\beta}\equiv 0,$$

$$\Delta R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}+R^{\alpha a}_{\beta[\gamma\mu]}\omega_{a}\equiv 0,\quad \Delta R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}-2R^{\alpha ab}_{\beta\mu\gamma}\omega_{b}\equiv 0,\quad \Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\equiv 0,$$

$$\Delta R^{a}_{\alpha\beta\gamma}+(\delta^{a}_{b}R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}-\delta^{\mu}_{\alpha}R^{a}_{b\beta\gamma})\omega^{b}_{\mu}+R^{ab}_{\alpha[\beta\gamma]}\omega_{b}\equiv 0,$$

$$\Delta R^{ab}_{\alpha\beta\gamma}+(\delta^{a}_{c}R^{\mu b}_{\alpha\beta\gamma}\omega-\delta^{\mu}_{\alpha}R^{ab}_{c\beta\gamma})\omega^{c}_{\mu}+2R^{acb}_{\alpha\beta\gamma}\omega_{c}\equiv 0,$$

$$\Delta R^{abc}_{\alpha\beta\gamma}+(\delta^{a}_{d}R^{\mu bc}_{\alpha\beta\gamma}-\delta^{\mu}_{\alpha}R^{abc}_{d\beta\gamma})\omega^{d}_{\mu}\equiv 0, \tag{10}$$

$$\Delta R_{a\alpha\beta}+(R^{b}_{a\alpha\beta}+K^{b}_{a[\alpha\beta]})\omega_{b}\equiv 0,\quad \Delta K^{b}_{a\alpha\beta}+(2K^{bc}_{a\beta\alpha}+R^{cb}_{a\alpha\beta})\omega_{c}\equiv 0,$$

$$\Delta K^{bc}_{a\alpha\beta}+R^{dbc}_{a\alpha\beta}\omega_{d}\equiv 0,$$

$$\Delta R_{\alpha\beta\gamma}+R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\mu}+(K^{a}_{\alpha[\beta\gamma]}+R^{a}_{\alpha\beta\gamma})\omega_{a}-R_{a\beta\gamma}\omega^{a}_{\alpha}\equiv 0,$$

$$\Delta K^{a}_{\alpha\beta\gamma}+(R^{ba}_{\alpha\beta\gamma}+2K^{ba}_{\alpha\beta\gamma})\omega_{b}+R^{\mu a}_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\mu}-K^{a}_{b\beta\gamma}\omega^{b}_{\alpha}\equiv 0,$$

$$\Delta K^{ab}_{\alpha\beta\gamma}+R^{cab}_{\alpha\beta\gamma}\omega_{c}+R^{\mu ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\mu}-K^{ab}_{c\beta\gamma}\omega^{c}_{\alpha}\equiv 0.$$

Несмотря на различия продолжений уравнений компонент объекта связности Г и сравнений (7_1) — (7_4), дифференциальные сравнения компонент объекта кривизны в любом из четырех случаев имеют вид (10), откуда следует

Теорема. *Объект кривизны R групповой связности Г в расслоении* $G^*(V^*)$ *над грассманоподобным многообразием* $V^* = Gr^*(m,n)$ *является тензором, содержащим 2 простейших [4] подтензора* $\{R^{acd}_{b\alpha\beta}\}$, $\{R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\}$ *и 2 простых подтензора*

$$\{R^{a}_{b\alpha\beta}, R^{ac}_{b\alpha\beta}, R^{acd}_{b\alpha\beta}\},\ \{R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}, R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}, R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\}.$$

Для обобщающего случая часть дифференциальных сравнений (8) принимает более общий вид:

$$\begin{gathered}
\Delta R^{ac}_{b\alpha\beta} + 2R^{adc}_{b\alpha\beta}\omega_d - (\delta^a_b M^{dc}_{\alpha\beta} + \delta^d_b M^{ac}_{\alpha\beta})\omega_d \equiv 0, \\
\Delta R^{acd}_{b\alpha\beta} - \delta^a_b M^{dce}_{\alpha\beta}\omega_d - M^{acd}_{\alpha\beta}\omega_b \equiv 0, \\
\Delta R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} - 2R^{\alpha ab}_{\beta\mu\gamma}\omega_b - \delta^\alpha_\beta M^{ba}_{\gamma\mu}\omega_b \equiv 0,\ \ \Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} - \delta^\alpha_\beta M^{cab}_{\gamma\mu}\omega_c \equiv 0, \qquad (11) \\
\Delta R^{ab}_{\alpha\beta\gamma} + (\delta^a_c R^{\mu b}_{\alpha\beta\gamma}\omega - \delta^\mu_\alpha R^{ab}_{c\beta\gamma})\omega^c_\mu + 2R^{acb}_{\alpha\beta\gamma}\omega_c - M^{ab}_{\beta\gamma}\omega_\alpha \equiv 0, \\
\Delta R^{abc}_{\alpha\beta\gamma} + (\delta^a_d R^{\mu bc}_{\alpha\beta\gamma} - \delta^\mu_\alpha R^{abc}_{d\beta\gamma})\omega^d_\mu - M^{abc}_{\beta\gamma}\omega_\alpha \equiv 0,
\end{gathered}$$

где

$$M^{ab}_{\alpha\beta} = \Lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \bar{\Lambda}^{ab}_{\beta\alpha} - \Lambda^a_\beta \Lambda^b_\alpha,\ \ M^{abc}_{\alpha\beta} = \Lambda^{a\lceil bc}_{\lfloor\alpha\beta}] + \Lambda^a_{\lfloor\alpha}\Lambda^{\lceil bc}_{\beta}].$$

Компоненты введенного объекта $M = \{M^{ab}_{\alpha\beta}, M^{abc}_{\alpha\beta}\}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta M^{ab}_{\alpha\beta} - 2M^{abc}_{\beta\alpha}\omega_c \equiv 0,\ \ \Delta M^{abc}_{\alpha\beta} \equiv 0.$$

Таким образом, M является тензором, содержащим подтензор. Назовем M виртуальным тензором, так как в каждом из четырех рассмотренных случаев он обращается в нуль. Тогда дифференциальные сравнения (11) превращаются в соответствующие сравнения из системы (10).

Список литературы

1. *Шевченко Ю. И.* О структурных уравнениях проективной группы // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2000. № 31. С. 93—100.

2. *Белова О. О.* Связность в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей //

Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Чебоксары, 2006. №5 (52). С. 18—20.

3. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г. и др.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

4. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

O. Belova

THE CURVATURE TENSOR OF CONNECTION
IN THE FIBERING OVER GRASSMAN-LIKE MANIFOLD
OF CENTRED PLANES

Four basic ways and one generalizing way of continuations of the equations for Grassman-like manifold of centred planes are considered. The structure equations for the forms of group connection in the principal fibering assotiated with Grassman-like manifold are found. The expressions for the curvature object of a group connection by the components of the connection object, fundamental object of 1st order and phaffian derivatives of the components of this objects are obtained. It is shown, that in every basic case the curvature object of connection is a tensor. It contains 2 elementary and 2 simple subtensors. Using a generalizing way we have a tensor in the differential equations for the components of curvature object. This tensor is called virtual as it vanishes in the basic cases.

УДК 514.75

С.Ю. Волкова

(Балтийский военно-морской институт им. Ф.Ф. Ушакова, г. Калининград)

ПЛОСКОСТИ НОРДЕНА — ТИМОФЕЕВА РЕГУЛЯРНОЙ КАСАТЕЛЬНО *r*-ОСНАЩЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Дано задание гиперполосы $H_{m(r)}$ в репере 1-го порядка и доказана теорема существования. Рассмотрены однопараметрические пучки TΛ-виртуальных нормалей