УДК 574.76

В. С. Малаховский

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

Голономные поверхности и прямолинейные конгруэнции в трехмерном проективном пространстве

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются поверхности и прямолинейные конгруэнции, характеризуемые нулевыми значениями диагональных компонент деривационных формул их канонических реперов. Такие многообразия определяются вполне интегрируемыми системами уравнений Пфаффа. Установлены различные геометрические свойства ассоциированных с этими многообразиями поверхностей и прямолинейных конгруэнций

Ключевые слова: голономная поверхность, голономная прямолинейная конгруэнция, фокус, торс, асимптотические линии, вполне интегрируемая система, сопряженность, гармоничность.

1. Голономные поверхности

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 гладкую нелинейчатую поверхность S, отнесенную к каноническому реперу С. П. Финикова. Матрица его деривационных формул [1, с. 37] имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} p_k\omega^k & \omega^1 & \omega^2 & 0 \\ a_2\omega^1 + b_2\omega^2 & \frac{1}{6}\left(p_2\omega^2 - p_1\omega^1\right) & \omega^1 & \omega^2 \\ b_1\omega^1 + a_1\omega^2 & \omega^2 & \frac{1}{6}\left(p_1\omega^1 - p_2\omega^2\right) & \omega^1 \\ a_1\omega^1 + a_2\omega^2 & b_1\omega^1 + a_1\omega^2 & a_2\omega^1 + b_2\omega^2 & -\frac{1}{2} p_k\omega^k \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Определение 1.1. *Поверхность* S *называется голономной, или поверхностью* S_0*, если*

$$p_1 = 0,\ p_2 = 0. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1. *Поверхности* S_0 *существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.*

Доказательство. Из (1.2) следует

$$\omega_0^0 = 0,\ \omega_1^1 = 0,\ \omega_2^2 = 0,\ \omega_3^3 = 0. \tag{1.3}$$

Продолжая систему (1.3), получим

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}. \tag{1.4}$$

Из выражений (1.1) и (1.4) следует, что система уравнений Пфаффа поверхности S_0 состоит из уравнений (1.3), а также

$$\begin{aligned} &\omega_0^3 = 0,\ \omega_1^2 = \omega^1,\ \omega_2^1 = \omega^2,\ \omega_1^3 = \omega^2,\ \omega_2^3 = \omega^1, \\ &\omega_3^0 = a_1\omega^1 + a_2\omega^2, \omega_1^0 = a_2\omega^1 + \tfrac{1}{2}\omega^2, \\ &\omega_2^0 = \tfrac{1}{2}\omega^1 + a_1\omega^2,\ \omega_1^0 - \omega_3^2 = 0,\ \omega_2^0 - \omega_3^1 = 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Осуществляя последовательные продолжения этой системы, приходим к вполне интегрируемой системе уравнений Пфаффа, состоящей из уравнений (1.3), (1.5) и

$$da_1 = m\omega^2, da_2 = m\omega^1, dm = 0. \tag{1.6}$$

Теорема 1.2. *Поверхности* S_0 *обладают следующими свойствами:*

1) *торсы прямолинейных конгруэнций первой и второй директрис Вильчинского* [1, с. 12] *соответствуют. Конгруэнция первых директрис Вильчинского сопряжена поверхности* S_0*, конгруэнция вторых директрис Вильчинского гармонична поверхности* S_0 [2, с. 251];

2) *фокусы луча* A_1A_2 *конгруэнции вторых директрис Вильчинского гармонически делят точки* A_1 *и* A_2*;*

3) *прямолинейные конгруэнции* (A_1A_3) *и* (A_2A_3) *сопряжены поверхности* S_0.

Доказательство. 1. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3) определяются одним и тем же уравнением:

$$a_2\left(\omega^1\right)^2 - a_1\left(\omega^2\right)^2 = 0. \tag{1.7}$$

Так как сеть асимптотических линий на поверхности S_0 — координатная, т. е. она определяется уравнением

$$\omega^1\omega^2 = 0, \tag{1.8}$$

то сеть линий (1.7) сопряжена на поверхности S_0.

2. Фокусы

$$F = t_1A_1 + t_2A_2 \tag{1.9}$$

луча A_1A_2 определяются уравнением

$$a_2t_1^2 - a_1t_2^2 = 0. \tag{1.10}$$

Следовательно,

$$\frac{t_2^{(1)}}{t_1^{(1)}} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, \quad \frac{t_2^{(2)}}{t_1^{(2)}} = -\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, \tag{1.11}$$

откуда следует

$$\left(A_1A_2;F_1F_2\right) = -1 .$$

3. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_3) и (A_2A_3) определяются соответственно уравнениями

$$\left(a_1 - a_2^1\right)\left(\omega^1\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(\omega^2\right)^2 = 0, \tag{1.12}$$

$$\frac{1}{4}\left(w^1\right)^2 - \left(a_2 - a_1^2\right)\left(w^2\right)^2 = 0. \tag{1.13}$$

Следовательно, на поверхности S_0 они определяют сопряженные сети.

2. Голономные прямолинейные конгруэнции

Рассмотрим в пространстве P_3 прямолинейную конгруэнцию $L \equiv (A_1 A_2)$, отнесенную к фокальному каноническому реперу. Матрица его деривационных формул [1, с. 14—17] имеет вид

$$\begin{bmatrix} \omega_0^0 & q\theta_1 + r\theta_2 & a\theta_1 + b\theta_2 & \theta_2 \\ 0 & \omega_1^1 & -\theta_2 & \theta_1 \\ \theta_2 & m\theta_1 & \omega_2^2 & 0 \\ \theta_1 & b\theta_1 + c\theta_2 & 0 & \omega_3^3 \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

где

$$\theta_1 \overset{def}{=} \omega_1^3, \quad \theta_2 \overset{def}{=} \omega_2^0, \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \omega_0^0 &= \frac{1}{8}\left[(4r+t)\theta_1 + (4s-p)\theta_2\right], \\ \omega_1^1 &= -\frac{1}{8}\left[(3t+4r)\theta_1 + (4s-3p)\theta_2\right], \\ \omega_2^2 &= -\frac{1}{8}\left[t\theta_1 + 3p\theta_2\right], \quad \omega_3^3 = \tfrac{1}{8}\left[3t\theta_1 + p\theta_2\right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Определение 2.1. *Конгруэнция* L *называется голономной или конгруэнцией* L_0*, если*

$$\omega_0^0 = 0, \ \omega_1^1 = 0, \ \omega_2^2 = 0, \ \omega_3^3 = 0, \tag{2.4}$$

т. е. если

$$p = 0, \ r = 0, \ s = 0, \ t = 0. \tag{2.5}$$

Продолжая уравнения (2.4), получим

$$a = 1, \ c = 1, \ m = -1. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1. *Конгруэнции* L_0 *существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.*

Доказательство. Учитывая (2.5) и (2.6) в матрице (2.1), убеждаемся, что система уравнений Пфаффа конгруэнции L_0 состоит из уравнений (2.4), а также

$$\begin{cases} \omega_0^1 = q\theta_1,\ \omega_0^2 = \theta_1 + b\theta_2,\ \omega_0^3 = \theta_2,\ \omega_1^0 = 0, \\ \omega_1^2 = -\theta_2,\ \omega_2^1 = -\theta_1,\ \omega_2^3 = 0,\ \omega_3^0 = \theta_1, \\ \omega_3^1 = b\theta_1 + \theta_2,\ \omega_3^2 = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Осуществляя последовательные продолжения этой системы, приходим к вполне интегрируемой системе уравнений Пфаффа

$$\begin{cases} \omega_0^0 = 0,\ \omega_1^1 = 0,\ \omega_2^2 = 0,\ \omega_3^3 = 0,\ \omega_0^1 = 0,\ \omega_2^3 = 0,\ \omega_3^2 = 0, \\ \omega_1^0 = 0,\ \omega_0^2 = \theta_1 + b\theta_2,\ \omega_0^3 = \theta_2,\ \omega_1^2 = -\theta_2,\ \omega_2^1 = -\theta_1, \\ \omega_3^0 = \theta_1,\ \omega_3^1 = b\theta_1 + \theta_2,\ db = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Матрица деривационных формул канонического репера конгруэнции L_0 имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_1 + b\theta_2 & \theta_2 \\ 0 & 0 & -\theta_2 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 & 0 \\ \theta_1 & b\theta_1 + \theta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Теорема 2.2. *Асимптотические линии на поверхностях* (A_0), (A_1), (A_2), (A_3), *порожденных конгруэнцией* L_0, *соответствуют.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \left(d^2 A_0\ A_0 A_2 A_3\right) = 0 &\leftrightarrow \theta_1^2 - \theta_2^2 = 0, \\ \left(d^2 A_1\ A_1 A_2 A_3\right) = 0 &\leftrightarrow \theta_1^2 - \theta_2^2 = 0, \\ \left(d^2 A_2\ A_2 A_0 A_1\right) = 0 &\leftrightarrow \theta_1^2 - \theta_2^2 = 0, \\ \left(d^2 A_3\ A_3 A_0 A_1\right) = 0 &\leftrightarrow \theta_1^2 - \theta_2^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Следствие. *Прямолинейные конгруэнции* (A_1A_2), (A_1A_3), (A_2A_0) *являются конгруэнциями* W. *Конгруэнции* L_0 *образуют подкласс конгруэнций* R, *т. е.* $L_0 \subset R$ [1, с. 18].

Теорема 2.3.

1. *Торсы прямолинейных конгруэнций* (A_1A_2), (A_1A_3), (A_2A_0) *соответствуют и определяются уравнением*

$$\theta_1\theta_2 = 0. \qquad (2.11)$$

2. *Поверхности* (A_1) *и* (A_2)*;* (A_1) *и* (A_3)*;* (A_2) *и* (A_0) *являются фокальными поверхностями соответственно конгруэнций* (A_1A_2), (A_1A_3), (A_2A_0).

3. *Торсы прямолинейных конгруэнций* (A_2A_3) *и* (A_0A_1) *соответствуют и определяются уравнением*

$$\theta_1^2 + b\theta_1\theta_2 + \theta_2^2 = 0. \qquad (2.12)$$

4. $$\left(A_2A_3;\, F_1^{(1)}F_2^{(1)}\right) = \left(A_0A_1;\, F_1^{(2)}F_2^{(2)}\right), \qquad (2.13)$$

где $F_1^{(1)}, F_2^{(1)}$ *— фокусы луча* $A_2A_3 \in (A_2A_3)$*;* $F_1^{(2)}, F_2^{(2)}$ *— фокусы луча* $A_0A_1 \in (A_0A_1)$.

Доказательство. Используя матрицу (2.9), получаем для торсов прямолинейных конгруэнций (A_1A_2), (A_1A_3), (A_2A_0) уравнение (2.11), а для торсов прямолинейных конгруэнций (A_2A_3) и (A_0A_1) — уравнения (2.12). Кроме того, убеждаемся, что (A_1) и (A_2) — фокальные поверхности конгруэнции (A_1A_2); (A_1) и (A_3) — фокальные поверхности конгруэнции (A_1A_3); (A_2) и (A_0) — фокальные поверхности конгруэнции (A_2A_0).

Фокусы

$$F^{(1)} = t_1A_2 + t_2A_3, \quad F^{(2)} = t_1A_0 + t_2A_1 \qquad (2.14)$$

определяются одним и тем же уравнением:

$$t_1^2 - bt_1t_2 + t_2^2 = 0. \qquad (2.15)$$

Следовательно, выполняется тождество (2.13).

3. Конгруэнции L_0^*

Теорема 3.1. *Прямолинейная конгруэнция* $\left(A_0A_3\right)$ *тогда и только тогда вырождается в линейчатую поверхность, когда*

$$b^2=1. \tag{3.1}$$

Доказательство. Имеем

$$d\left[A_0A_3\right]=\left(\theta_1+b\theta_2\right)\left[A_2A_3\right]+\left(b\theta_1+\theta_2\right)\left[A_0A_1\right]. \tag{3.2}$$

1. Если $b=\varepsilon$ $\left(\varepsilon^2=1\right)$, то

$$d\left[A_0A_3\right]=\left(\theta_1+\varepsilon\theta_2\right)\left(\left[A_2A_3\right]+\varepsilon\left[A_0A_1\right]\right), \tag{3.3}$$

откуда следует, что прямая A_0A_3 вдоль линии $\theta_1+\varepsilon\theta_2=0$ стационарна.

2) Пусть

$$b\theta_1+\theta_2=\lambda\left(\theta_1+b\theta_2\right), \tag{3.4}$$

тогда

$$\left(b\theta_1+\theta_2\right)\wedge\left(\theta_1+b\theta_2\right)=0 \ \rightarrow\ b^2=1. \tag{3.5}$$

Ч. т. д.

Определение 3.1. *Конгруэнцией* $L_0^{(\varepsilon)}$ *называется конгруэнция* L_0, *характеризуемая условием*

$$b=\varepsilon\,. \tag{3.6}$$

Так как свойства конгруэнций $L_0^{(1)}$ и $L_0^{(-1)}$ аналогичны, то ограничимся рассмотрением конгруэнций $L_0^{(1)}$. Матрица деривационных формул таких конгруэнций имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_1+\theta_2 & \theta_2 \\ 0 & 0 & -\theta_2 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 & 0 \\ \theta_1 & \theta_1+\theta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Теорема 3.2. *Фокальные поверхности* (A_1) *и* (A_2) *конгруэнции* $L_0^{(1)}$ *линейчатые.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} dA_1\big|_{\theta_1-\theta_2=0} &= \theta_1\left(A_3 - A_2\right), \quad d\left[A_1, A_3 - A_2\right] \equiv 0, \\ dA_2\big|_{\theta_1+\theta_2=0} &= \theta_2\left(A_0 + A_1\right), \quad d\left[A_2, A_0 + A_1\right] \equiv 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Следовательно, асимптотические линии $\theta_1 - \theta_2 = 0$ на поверхности (A_1) и $\theta_1 + \theta_2 = 0$ на поверхности (A_2) — прямые. Ч. т. д.

Теорема 3.3. *Вторые асимптотические преобразования поверхностей* (A_1) *и* (A_2)

$$(A_1) \to (A_2) \to (A_0), \quad (A_2) \to (A_1) \to (A_3), \tag{3.9}$$

т. е. преобразования с помощью конгруэнций W *, преобразуют эти поверхности в одну линейчатую поверхность.*

Доказательство. Из теоремы (3.1) следует, что (A_0A_3) — линейчатая поверхность, т. е.

$$(A_0) \equiv (A_3) \equiv (A_0A_3). \tag{3.10}$$

Ч. т. д.

Теорема 3.4. *Точки* A_0 *и* A_2*;* A_1 *и* A_3*;* A_1 *и* A_2 *полярно сопряжены относительно квадрики Ли линейчатой поверхности* (A_0A_3) *в любой точке* $M \in A_0A_3$.

Доказательство. Уравнение квадрики Ли поверхности (A_0A_3) в точках A_0 и A_3 имеет вид

$$\left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 + 2x^2x^3 - 2x^0x^1 = 0. \tag{3.11}$$

Следовательно, в любой точке $M \in A_0A_3$ уравнения квадрики Ли поверхности (A_0A_3) имеет тот же вид. Ч. т. д.

Список литературы

1. *Малаховский В. С.* Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1986.

2. *Фиников С. П.* Теория конгруэнций. М.; Л., 1950.

V. S. Malakhovsky

Holonomic surfaces and line-congruences in three-dimensional projective space

In three-dimensional projective space P_3 surfaces and line-congruencies with zero values of diagonal components of derivation formulas of their canonical frames are investigated. Such manifolds are defined by completely entegrable Pfaffian systems of equations. Different geometrical characteristics of associated with these manifolds surfaces and line-congruencies are investigated.

УДК 514.75

В. С. Малаховский, Е. А. Щербак

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

Об исследованиях на пустом множестве в дифференциальной геометрии

Дан анализ причин возникновения в дифференциальной геометрии теорий на пустом множестве. Показано, что использование относительно неинвариантных систем дифференциальных уравнений и дифференциальных неравенств, превращение символа Кронекера и его обобщений, не зависящих от преобразований фундаментальной группы, в геометрические объекты (тензоры и квазитензоры) порождает теории на пустом множестве.

Ключевые слова: тензор, квазитензор, многообразие, относительная инвариантность, геометрический объект, тождество, неголономный, символ Кронекера, обобщенный символ Кронекера.