$$
\begin{cases}
\omega_0^3 = \omega_3^0 = \omega_i^{\hat{i}} = \omega_0^0 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0, & \omega_i^3 = c\,\omega^{\hat{i}}, \\
\omega_i^0 = \omega_i^3, \quad \omega_3^i = \omega^{\hat{i}}, \quad dc = 0,
\end{cases} \tag{2.5}
$$

причем из (I.5) и из того, что конгруэнция $\mathcal{L}_0$ -это двупараметрическое семейство квадрик, следует .

$$
c\,(c^2 - 1) \neq 0 . \tag{2.6}
$$

Система (2.5) - вполне интегрируема и определяет однопараметрическое семейство проективно неэквивалентных конгруэнций $\mathcal{L}_0$.Обозначим:

$$
B_0 = A_1 + A_2, \quad B_1 = A_1 - A_2, \quad B_2 = A_0 + A_3, \quad B_3 = A_0 - A_3, \tag{2.7}
$$

$$
\theta^1 = \omega^1 + \omega^2, \quad \theta^2 = \omega^2 - \omega^1 \tag{2.8}
$$

Точки B_α являются фокусами лучей A_1A_2, A_0A_3 прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3) соответственно, а уравнение $\theta^1\theta^2 = 0$ определяет торсы этих конгруэнций.

Т е о р е м а 3. Прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_0A_3), ассоциированные с конгруэнцией $\mathcal{L}_0$,являются линейными с общими директрисами B_0B_2 и B_1B_3 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя (2.7) с использованием (2.5), находим

$$
dB_0 = c\,\theta^1 B_2, \quad dB_1 = c\,\theta^2 B_3, \quad dB_2 = \theta^1 B_0, \quad dB_3 = -\theta^2 B_1. \tag{2.9}
$$

Следовательно, прямые B_0B_2 и B_1B_3 ,пересекающие лучи A_1A_2 и A_0A_3, одинаковы для всех лучей прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3).

3. С квадрикой $Q \in \mathcal{L}_0$ ассоциируются четыре коники H_α ,являющиеся сечениями квадрики Q плоскостями $(B_\alpha A_0 A_3)$ (для $\alpha = 0, \hat{1}$) и плоскостями $(B_\alpha A_1 A_2)$ (для $\alpha = 2, 3$). Коники H_0, H_1, H_2, H_3 определяются соответственно уравнениями:

$$
\begin{cases}
(x^1)^2 - x^0x^3 = 0, & x^1 - x^2 = 0, \quad (x^1)^2 + x^0x^3 = 0, \quad x^1 + x^2 = 0, \\
(x^0)^2 - x^1x^2 = 0, & x^0 - x^3 = 0, \quad (x^0)^2 + x^1x^2 = 0, \quad x^0 + x^3 = 0 .
\end{cases} \tag{3.I}
$$

Т е о р е м а 4. Точки пересечения с квадрикой Q прямых A_0A_3, $B_\alpha B_2$, $B_\alpha B_3$ (для $\alpha = 0, \hat{1}$) , прямых A_1A_2 , $B_\alpha B_0$, $B_\alpha B_1$ (для $\alpha = 2, 3$) являются фокальными точками H_α .Фокальные семейства конгруэнции (H_α) являются кратными и соответствуют торсам прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим, например, конику H_2 (для H_0, H_1, H_3 -рассуждения аналогичны). Фокальные точки коники H_2 и фокальные семейства конгруэнции (H_2) определяются системой уравнений:

$$
\begin{cases}
(x^0)^2 - x^1x^2 = 0, \quad x^0 - x^3 = 0, \quad \theta^2\,(x^1 - x^2) = 0, \\
x^0\,(\theta^1\,(x^1 + x^2) - 2c\,(x^1\omega^1 + x^2\omega^2)) = 0,
\end{cases} \tag{3.2}
$$

откуда следует, что фокальному семейству $\theta^2 = 0$ соответствуют фокальные точки A_1, A_2, $B_2 \pm i\,B_1$,а фокальному семейству $\theta^1 = 0$ соответствуют фокальные точки $B_2 \pm B_0$.

Библиографический список

I. Ф и н и к о в С.П. Теория конгруэнций /ГИТТЛ.М.-Л.1950.

2. М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.научн.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1981.Вып.I2.С.44-47.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ ВИДЕ КОНГРУЭНЦИЙ ПАР КОНИК В A_3

Е.А. Щ е р б а к
(Калининградский государственный университет)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются специальные виды конгруэнций пар коник $\{F_1, F_2\}$,где коника F_1 лежит на инвариантной цилиндрической поверхности Φ ,а коника F_2 проходит через центр коники F_1 и имеет центр, лежащий на конике F_1. Плоскости коник F_1 и F_2 не параллельны. Назовем такие конгруэнции конгруэнциями M.

Исследования проводятся в частично- канонизированном репере $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$ ($\alpha = \hat{1}, 2, 3$), начало A которого совмещено с центром коники F_1, концы E_i векторов $\bar{e}_i$ ($i = \hat{1}, 2$) расположены на конике F_1 так, что векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены относительно F_1 ,причем конец E_1 вектора $\bar{e}_1$ помещен в центр коники F_2 .Вектор $\bar{e}_3$ параллелен образующей цилиндрической поверхности Φ .

Уравнения коник F_1, F_2 и цилиндрической поверхности Φ в выбранном репере имеют соответственно вид:

$$
F_1:\ (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0, \tag{I}
$$

$$
F_2:\ (x^1)^2 + 2a\,x^2x^3 + b\,(x^3)^2 - 2x^1 - 2a\,x^3 = 0, \quad x^2 + c\,x^3 = 0, \tag{2}
$$

$$
\Phi:\ (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0. \tag{3}
$$

Из условия инвариантности цилиндрической поверхности Φ имеем:

$$
\omega^1 = \omega^2 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0, \quad \omega_2^1 + \omega_1^2 = 0 . \tag{4}
$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции M состоит из уравнений (4) и следующих уравнений:

$$
\begin{cases}
\omega_1^2 = \Gamma_1^{2i}\,\Omega_i, \quad \omega^3 = \Gamma^{3i}\,\Omega_i, \quad da - a\,\omega_3^3 = \Gamma_a^i\,\Omega_i, \\
db - 2b\,\omega_3^3 = \Gamma_b^i\,\Omega_i, \quad dc - c\,\omega_3^3 = \Gamma_3^i\,\Omega_i,
\end{cases} \tag{5}
$$

где главные формы $\Omega_i = \omega^3_i$ приняты за независимые формы конгруэнции M. Анализируя системы уравнений (4) и (5), убеждаемся, что конгруэнции M существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов. Координаты фокальных точек коники F_2 конгруэнции (F_2) находятся из уравнений (2) и уравнения:

$$
\begin{aligned}
&[-a(x^1)^2 - (c\Gamma^{21}_1 + \Gamma^1_a + b)x^1x^3 + \tfrac{1}{2}\Gamma^1_b (x^3)^2 + a x^1 - ((a-1)c\Gamma^{21}_1 + b\Gamma^{31} + \Gamma^1_a)x^3 + \\
&+ a\Gamma^{31}]\cdot[-\Gamma^{22}_1 x^1 + (c^2 + \Gamma^2_2)x^3 - c\Gamma^{32}] - [(-c\Gamma^{22}_1 + ac + \Gamma^2_a)x^1x^3 + \\
&+ (bc + \tfrac{1}{2}\Gamma^2_b)(x^3)^2 - a\Gamma^{32}x^1 - ((a-1)c\Gamma^{23}_1 + ac + b\Gamma^{32} + \Gamma^2_a)x^3 + a\Gamma^{32}]\times \\
&\times[-(\Gamma^{21}_1 + c)x^1 + \Gamma^1_c x^3 - c\Gamma^{31}] = 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Очевидно, что точка A является фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2).

Обозначим через L вторую точку пересечения коники F_2 со своим диаметром $A\bar{e}_1$.

Т е о р е м а 1. Точка L тогда и только тогда является фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2), когда либо $A\bar{e}_3$ есть касательная к конике F_2 в точке A, либо когда формы ω^2_1 и $(\omega^3 + 2\Omega_1)$ — линейно зависимые.

Необходимость. Пусть точка L (2,0,0) является фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2). Подставляя координаты точки L в уравнение (6), получаем

$$a(\Gamma^{22}_1 (2 + \Gamma^{31}) - \Gamma^{32}\Gamma^{21}_1) = 0. \tag{7}$$

Из (7) следует: 1) $a = 0$, т.е. векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_3$ сопряжены относительно коники F_2, а, следовательно, $A\bar{e}_3$ является касательной к конике в точке A; 2) $\Gamma^{22}_1 (2 + \Gamma^{31}) - \Gamma^{32}\Gamma^{21}_1 = 0$.

$$\tag{8}$$

Условие (8) есть условие линейной зависимости форм ω^2_1 и $(\omega^3 + 2\Omega_1)$.

Достаточность. 1) Пусть $A\bar{e}_3$ касается F_2 в точке A, тогда $a = 0$, следовательно, и $c = 0$. При этих условиях уравнение (6) принимает вид:

$$(bx^1x^3 + \tfrac{1}{2}\Gamma^1_b (x^3)^2 + \Gamma^{31} b x^3)\Gamma^{22}_1 x^1 - (\tfrac{1}{2}\Gamma^2_b (x^3)^2 - b\Gamma^{32}x^3)\Gamma^{21}_1 x^1 = 0. \tag{9}$$

Подставляя координаты точки L (2,0,0) в уравнение (9), убеждаемся в том, что точка L — фокальная точка коники F_2 конгруэнции (F_2).
2) Пусть формы ω^2_1 и $(\omega^3 + 2\Omega_1)$ — линейно зависимы, тогда $\omega^2_1 \wedge (\omega^3 + 2\Omega_1) = 0$, т.е. выполняется условие (8). Учитывая его в (6) и подставляя координаты точки L, убеждаемся, что она является фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2).

С л е д с т в и е. Если точка L является характеристической точкой плоскости $A\bar{e}_1\bar{e}_2$ конгруэнции $(A\bar{e}_1\bar{e}_2)$, то она является и фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка L — характеристическая точка плоскости $A\bar{e}_1\bar{e}_2$, тогда $\Gamma^{31} = -2$, $\Gamma^{32} = 0$. Имеем $\omega^3 + 2\Omega_1 = 0$, что и доказывает утверждение.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией M_1 будем называть такую конгруэнцию M, для которой $A\bar{e}_3$ является касательной к конике F_2 в точке A.

Завершим канонизацию репера следующим образом: конец E_3 вектора $\bar{e}_3$ расположим на касательной к конике F_2, параллельной вектору $\bar{e}_1$. Уравнения коники F_2 имеют вид

$$(x^1)^2 + (x^3)^2 - 2x^1 = 0, \quad x^2 = 0. \tag{10}$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции M_1 состоит из уравнений (4) и следующих уравненений:

$$\omega^2_1 = \Gamma^{2i}_1 \Omega_i, \quad \omega^3 = \Gamma^{3i}\Omega_i, \quad \omega^3_3 = \Gamma^{3i}_3 \Omega_i. \tag{11}$$

Анализируя системы уравнений (4), (11), убеждаемся, что конгруэнции M_1 существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов. Координаты фокальных точек коники F_2 конгруэнции (F_2) находятся из уравнений (10) и уравнения

$$x^1x^3(x^1\Gamma^{22}_1 - \Gamma^{32}\Gamma^{21}_1 + \Gamma^{31}\Gamma^{22}_1) = 0. \tag{12}$$

Т е о р е м а 2. Точка A является строенной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (12) следует, что:
1) $x^3 = 0$, т.е. точки A и L являются фокальными точками коники F_2;
2) $x^1 = 0$, т.е. точка A является сдвоенной фокальной точкой коники F_2, т.к. $A\bar{e}_3$ — касается коники F_2 в точке A. Таким образом, точка A является строенной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2).

Т е о р е м а 3. Фокальные точки коники F_2 конгруэнции (F_2), отличные от точек A и L, лежат на прямой ℓ, параллельной вектору $\bar{e}_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (12) следует, что фокальные точки коники F_2 лежат на прямой ℓ:

$$x^1\Gamma^{22}_1 - \Gamma^{32}\Gamma^{21}_1 + \Gamma^{31}\Gamma^{22}_1 = 0, \quad x^2 = 0, \tag{13}$$

которая параллельна вектору $\bar{e}_3$.

Т е о р е м а 4. Точка A тогда и только тогда является пятикратной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2), когда формы ω_1^2 и ω^3 – линейно зависимы.

Доказательство. Из уравнения (12) следует, что точка A является пятикратной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2) тогда и только тогда, когда $\Gamma_1^{21}\Gamma^{32}-\Gamma_1^{22}\Gamma^{31}=0$, т.е. когда формы ω_1^2 и ω^3 линейно зависимы.

Теорема 5. Точка L тогда и только тогда является строенной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2), когда формы ω_1^2 и $(\omega^3+2\Omega_1)$ – линейно зависимы.

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что L является строенной фокальной точкой коники F_2 тогда и только тогда, когда прямая ℓ касается коники F_2 в точке L, т.е. когда

$$\Gamma_1^{22}(\Gamma^{31}+2)-\Gamma^{32}\Gamma_1^{21}=0. \qquad (14)$$

Условие (14) и означает линейную зависимость форм ω_1^2 и $(\omega^3+2\Omega_1)$.

Следствие. Если точка L является характеристической точкой плоскости $A\bar e_1\bar e_2$ конгруэнции $(A\bar e_1\bar e_2)$, то точка L является строенной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2).

Доказательство аналогично доказательству следствия из теоремы 1.

Теорема 6. Точки N_1, N_2 пересечения коники F_2 с диаметром $E_1\bar e_3$ тогда и только тогда являются фокальными точками коники F_2 конгруэнции (F_2), когда формы ω_1^2 и $(\omega^3+\Omega_1)$ – линейно зависимы.

Доказательство. Из уравнения (12) следует, что точки $N_1(1,0,1)$ и $N_2(1,0,-1)$ тогда и только тогда являются фокальными точками коники F_2 конгруэнции (F_2), когда $\Gamma_1^{22}(\Gamma^{31}+1)-\Gamma^{32}\Gamma_1^{21}=0$, а это и есть условие линейной зависимости форм ω_1^2 и $(\omega^3+\Omega_1)$.

Следствие. Если точка E_1 является характеристической точкой плоскости $A\bar e_1\bar e_2$ конгруэнции $(A\bar e_1\bar e_2)$, то N_1 и N_2 – фокальные точки коники F_2 конгруэнции (F_2).

Доказательство. Пусть точка E_1 – характеристическая точка плоскости $A\bar e_1\bar e_2$, тогда $\Gamma^{31}=-1$, $\Gamma^{32}=0$. Учитывая эти соотношения в уравнении (12), получим

$$x^1x^3(x^1\Gamma_1^{22}-\Gamma_1^{22})=0. \qquad (15)$$

Подставляя координаты точек N_1 и N_2 в (15), убеждаемся в справедливости утверждения.

Теорема 7. Прямая ℓ тогда и только тогда проходит через характеристическую точку $K(-\Gamma^{31};-\Gamma^{32};0)$ плоскости $A\bar e_1\bar e_2$ конгруэнции $(A\bar e_1\bar e_2)$, когда либо точка K лежит на прямой $A\bar e_1$, либо на индикатрисе вектора $\bar e_1$ касательная вдоль линии $\Omega_2=0$ параллельна вектору $\bar e_3$.

Доказательство. Из уравнений (13) следует, что прямая ℓ проходит через точку K тогда и только тогда, когда $\Gamma^{32}\Gamma_1^{21}=0$. Условие $\Gamma^{32}=0$ означает, что характеристическая точка K плоскости $A\bar e_1\bar e_2$ конгруэнции $(A\bar e_1\bar e_2)$ лежит на прямой $A\bar e_1$. Условие $\Gamma_1^{21}=0$ означает, что $(d\bar e_1)_{\Omega_2=0}$ параллелен вектору $\bar e_3$, т.к.

$$d\bar e_1=(\Gamma_1^{21}\bar e_1+\bar e_3)\Omega_1+\Gamma_1^{22}\bar e_2\Omega_2.$$

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ КВАДРИК С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЦЕНТРОВ

Е.П.Юрова

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном аффинном пространстве исследуется специальный класс конгруэнций L центральных квадрик с вырождающейся в линию поверхностью центров.

Отнесем конгруэнцию L к реперу $R=\{A,\bar e_\alpha\}(\alpha,\beta=1,2,3)$, начало A которого совмещено с центром квадрики Q, вектор $\bar e_1$ направлен по касательной к линии (A), конец E_3 вектора $\bar e_3$ расположен в фокальной точке квадрики Q, вектор $\bar e_2$ сопряжен векторам $\bar e_1$ и $\bar e_3$ относительно Q, причем концы E_i векторов $\bar e_i$ ($i,j,k=1,2$) расположены на квадрике Q. Уравнение квадрики Q и система уравнений Пфаффа конгруэнции L в выбранном репере принимают соответственно вид

$$\mathcal{F}\equiv (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-1=0, \qquad (1)$$

$$\begin{cases}\omega^2=0, \quad \omega^3=0, \quad \omega_3^3=0, \quad \omega^1=\alpha\,\omega_1, \quad \omega_1^2=\beta\,\omega_1,\\ \omega_2^1+\omega_1^2=\lambda^k\omega_k, \quad \omega_i^k=e_i^k\,\omega_k, \quad \omega_3^i+\omega_i=b^i\omega_i+b\,\omega_j,\end{cases} \qquad (2)$$

где $\alpha\neq 0$, т.к. из рассмотрения исключается случай вырождения в точку поверхности центров (A) и главные формы $\omega_i=\omega_i^3$ приняты за независимые формы конгруэнции L.

Анализируя систему уравнений (2), убеждаемся, что конгруэнции L существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов. Обозначим через E_α^* точки, аффинно-симметричные точкам E_α. Из системы (2) следует

Теорема 1. Конгруэнции L обладают следующими свойствами: 1) торсы прямолинейной конгруэнции (AE_2) соответствуют координатным линиям $\omega_i=0$; 2) ассоциированные квадрики Q' конгруэнции L проходят

15 Зак. 1209