УДК 514.75

С.Ю. Волкова

(*Балтийский военно-морской институт*)

ДВОЙСТВЕННЫЕ ПРОЕКТИВНЫЕ СВЯЗНОСТИ S-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Построены проективные линейные связности $\overset{1}{\sigma},\overset{2}{\sigma},\overset{3}{\sigma}$, базисного L-распределения скомпонованного S-распределения проективного пространства P_n. Получены охваты тензоров кривизны-кручения этих связностей. Найдены условия совпадения связностей $\overset{1}{\sigma},\overset{2}{\sigma},\overset{3}{\sigma}$ и двойственности пространств проективной связности $\overset{1}{Ð}_{n,\ell}$, $\overset{2}{Ð}_{n,\ell}$, $\overset{3}{Ð}_{n,\ell}$. Показано, что оснащение голономного L-распределения в смысле Нордена-Картана индуцирует пространство $\overset{2}{Ð}_{n,\ell}$ с нулевым кручением, двойственное $\overset{1}{Ð}_{n,\ell}$.

Используется следующая схема индексов:

$I,J,K,P,Q,...=\overline{1,n}$; $p,q,s,t,...=\overline{1,r}$; $i,j,k,...=\overline{r+1,m}$; $A,B,C,...=(\overline{1,r};\overline{m+1,n-1})$,
$\alpha,\beta,\gamma,\ldots=\overline{m+1,n-1}$; $u,v,\ldots=\overline{r+1,n-1}$; $\hat{A},\hat{B},\hat{C},\ldots=(\overline{1,r};\overline{m+1,n})$,
$\hat{u},\hat{v},\ldots=\overline{r+1,n}$; $\hat{\alpha},\hat{\beta},\ldots=\overline{m+1,n}$.

§1. Первая проективная связность базисного L-распределения

Рассмотрим специальный класс трехсоставных распределений проективного пространства P_n [1], оснащающее M-распределение которого несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ, L)-распределений плоскостей Λ и L таких, что в каждом центре A_0 при смещении одной из плоскостей $\Lambda(A_0)$ и $L(A_0)$ вдоль линий, принадлежащих другой плоскости, она остается в плоскости $M(A_0)$. Такой класс трехсоставных распределений назван S-распределениями. В репере 1-го порядка $\Re_1$ S-распределение задается уравнениями (без соответствующих замыканий этих уравнений):

$$\omega_p^n=\Lambda_{p\hat{A}}^n\omega_0^{\hat{A}}=M_{p\hat{A}}^n\omega_0^{\hat{A}}=H_{p\hat{A}}^n\omega_0^{\hat{A}},\ \omega_i^n=L_{i\hat{u}}^n\omega_0^{\hat{u}}=M_{i\hat{u}}^n\omega_0^{\hat{u}}=H_{i\hat{u}}^n\omega_0^{\hat{u}},$$
$$\omega_p^\alpha=\Lambda_{pK}^\alpha\omega_0^K=M_{pK}^\alpha\omega_0^K,\ \omega_i^\alpha=L_{iK}^\alpha\omega_0^K=M_{iK}^\alpha\omega_0^K,\ \omega_p^i=\Lambda_{pK}^i\omega_0^K, \tag{1}$$
$$\omega_i^p=L_{iK}^p\omega_0^K,\ \omega_\alpha^n=H_{\alpha\hat{\beta}}^n\omega_0^{\hat{\beta}},\ \omega_\alpha^p=H_{\alpha K}^p\omega_0^K,\ \omega_\alpha^i=H_{\alpha K}^i\omega_0^K.$$

Пусть базисное L-распределение оснащено в смысле Нордена-Картана полем геометрического объекта $\{\nu_n^i, L_n^A, y_A^0, y_n^0\}$ [2], где

$$\nabla\nu_n^i+\omega_n^i=\nu_{nK}^i\omega_0^K,\ \nabla L_n^A+\omega_n^A=L_{nK}^A\omega_0^K,$$
$$\nabla y_A^0+\omega_A^0=y_{AK}^0\omega_0^K,\ \nabla y_n^0+\nu_n^i\omega_i^0+L_n^A\omega_A^0+\omega_n^0=y_{nK}^0\omega_0^K. \tag{2}$$

Тогда L-распределение индуцирует на S-распределении линейную проективную связность Г, определяемую системой форм $\{\omega_0^K; \overset{1}{\sigma}{}_i^j\}$. Слоевые формы $\overset{1}{\sigma}{}_i^j$ соответствующего пространства проективной связности $\overset{1}{Đ}_{n,\ell}$ [3], следуя работе [4], зададим следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{\sigma}{}_0^i = \omega_0^i - \nu_n^i \omega_0^n, \quad \overset{1}{\sigma}{}_i^j = \omega_i^j - \nu_n^j \omega_i^n, \\
&\overset{1}{\sigma}{}_0^0 = \omega_0^0 - y_A^0 \omega_0^A - (y_n^0 - y_A^0 L_n^A)\omega_0^n, \\
&\overset{1}{\sigma}{}_i^0 = \omega_i^0 - y_A^0 \omega_i^A - \hat{\sigma}_n^0 \omega_0^n,
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\hat{\sigma}_n^0 = y_n^0 - y_A^0 L_n^A, \quad \nabla\hat{\sigma}_n^0 + \nu_n^i \omega_i^0 - y_A^0 \omega_n^A + \omega_n^0 = \hat{\sigma}_{nK}^0 \omega_0^K. \tag{4}$$

Формы $\omega_0^K, \overset{1}{\sigma}{}_i^j$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана-Лаптева:

$$D\omega_0^J = \omega_0^L \wedge \omega_L^J + \omega_0^0 \wedge \omega_0^J, \quad d\overset{1}{\sigma}{}_i^j = \overset{1}{\sigma}{}_i^k \wedge \overset{1}{\sigma}{}_k^j + \overset{1}{\sigma}{}_{iPQ}^j \omega_0^P \wedge \omega_0^Q. \tag{5}$$

Компоненты тензора кривизны-кручения $\overset{1}{\sigma}{}_{iPQ}^j$ пространства $\overset{1}{Đ}_{n,\ell}$ в уравнениях (5) имеют следующее строение:

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{\sigma}{}_{0PQ}^i = \hat{\sigma}_n^0 \delta_{[P}^n \delta_{Q]}^i + \nu_n^i \nu_n^j L_{j[P}^n \delta_{Q]}^n - H_{A[P}^i \delta_{Q]}^A + \nu_n^i H_{A[P}^n \delta_{Q]}^A - y_A^0 \delta_{[P}^A \delta_{Q]}^i - \nu_{n[P}^i \delta_{Q]}^n, \\
&\overset{1}{\sigma}{}_{0PQ}^0 = \hat{\sigma}_n^0 (\nu_n^k L_{k[P}^n \delta_{Q]}^n + H_{A[P}^n \delta_{Q]}^A) + y_A^0 \nu_n^i L_{i[P}^A \delta_{Q]}^n + y_A^0 L_{n[P}^A \delta_{Q]}^n + \\
&+ L_n^A y_{A[P}^0 \delta_{Q]}^n - y_{n[P}^0 \delta_{Q]}^n - y_{A[P}^0 \delta_{Q]}^A, \\
&\overset{1}{\sigma}{}_{iPQ}^j = \hat{\sigma}_n^0 L_{i[P}^n \delta_{Q]}^j - \hat{\sigma}_n^0 \nu_n^j L_{i[P}^n \delta_{Q]}^n + y_A^0 L_{i[P}^A \delta_{Q]}^j - y_A^0 \nu_n^j L_{i[P}^A \delta_{Q]}^n + L_{i[P}^A H_{|A|Q]}^j - \\
&- \nu_n^j \nu_n^k L_{i[P}^n L_{|k|Q]}^n - \nu_n^j L_{i[P}^A H_{|A|Q]}^n - \nu_{n[P}^j L_{|i|Q]}^n, \\
&\overset{1}{\sigma}{}_{iPQ}^0 = y_A^0 L_{n[P}^A L_{|i|Q]}^n + L_n^A y_{A[P}^0 L_{|i|Q]}^n - y_{A[P}^0 L_{|i|Q]}^A - y_{n[P}^0 L_{|i|Q]}^n - y_A^0 y_B^0 L_{i[P}^A \delta_{Q]}^B - \\
&- \acute{o}_A^0 \nu_n^k \Lambda_{ni[P}^n L_{|k|Q]}^A - \hat{\sigma}_n^0 (L_{i[P}^A H_{|A|Q]}^n + \hat{\sigma}_n^0 L_{i[P}^n \delta_{Q]}^n + \acute{o}_A^0 L_{i[P}^n \delta_{Q]}^A + \acute{o}_A^0 L_{i[P}^A \delta_{Q]}^n + \nu_n^k L_{i[P}^n L_{|k|Q]}^n).
\end{aligned} \tag{6}$$

Показано, аналогично [4], что линейная проективная связность σ, определенная системой форм (3) есть связность, полученная путем проектирования при помощи внутренне определенной оснащающей плоскости $C_{n-\ell-1}(\nu_n^i) = [\hat{M}_A, \hat{M}_n]$ в смысле Картана, определенной объектом $\{\nu_n^i, L_n^A, \acute{o}_n^0, \acute{o}_A^0\}$.

2. Найдем условия, при которых оснащающая плоскость Картана

$C_{n-\ell-1}(\nu_n^i)=[\hat{M}_A,\hat{M}_n]$, где $\hat{M}_A = A_A + \sigma_A^0 A_0$, $\hat{M}_n(\nu_n^i) = \sigma_n^0 A_0 + \nu_n^i A_i + L_n^A A_A + A_n$, при любых смещениях центра A_0 S-распределения не выходит из соответствующей нормали 1-го рода $N_{n-\ell}(\nu_n^i)$ плоскости $L(A_0)$. В силу уравнений инфинитезимальных перемещений репера $\{A_{\bar{J}}\}$: $dA_{\bar{J}} = \omega_{\bar{J}}^{\bar{K}} A_{\bar{K}}$ и уравнений (2) дифференциалы точек $\hat{M}_A$ и $\hat{M}_n$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
d\hat{M}_A &= [y_{AK}^0\omega_0^K - y_B^0 y_A^0\omega_0^B - (y_n^0 - y_B^0 L_n^B)(y_A^0\omega_0^n + \omega_A^n)]A_0 + [\omega_0^i y_A^0 + \omega_A^i - \nu_n^i \sigma_A^0\omega_0^n - \\
&- \nu_n^i\omega_A^n)A_i + (\omega_0^B\sigma_A^0 + \omega_A^B - L_n^B\sigma_A^0\omega_0^n - L_n^B\omega_A^n)\hat{M}_B + (\omega_0^n\sigma_A^0 + \omega_A^n)\hat{M}_n, \\
d\hat{M}_n &= [y_{nK}^0\omega_0^K - y_B^0(L_{nK}^B\omega_0^K + y_n^0\omega_0^B + \nu_n^i\omega_i^B) - (y_n^0 - y_B^0\Lambda_n^B)(y_n^0\omega_0^n + L_n^B\omega_B^n + \\
&+ \nu_n^i\omega_i^n)]A_0 + [\nu_{nK}^i\omega_0^K + y_n^0\omega_0^i + \Lambda_n^B\omega_B^i - \nu_n^i(y_n^0\omega_0^n + \nu_n^j\omega_j^n + \Lambda_n^B\omega_B^n)]A_i + [L_{nK}^A\omega_0^K + \\
&+ \sigma_n^0\omega_0^A + \nu_n^i\omega_i^A - \Lambda_n^A(\sigma_n^0\omega_0^n + \nu_n^i\omega_i^n + \Lambda_n^B\omega_B^n)]\hat{M}_A + (\omega_n^n + \sigma_n^0\omega_0^n + \nu_n^i\omega_i^n + \Lambda_n^A\omega_A^n)\hat{M}_n.
\end{aligned} \tag{7}$$

Из (7) непосредственно получаем условия неподвижности плоскости $C_{n-\ell-1}$ (ν_n^i):

$$\begin{cases} \nu_{nK}^i + y_n^o\delta_K^i + \Lambda_n^B H_{BK}^i - \nu_n^i(y_n^o\delta_K^n + \nu_n^j L_{jK}^n + \Lambda_n^B H_{BK}^n) = 0, \\ y_A^o\delta_K^i + H_{AK}^i - \nu_n^i(y_A^o\delta_K^n + H_{AK}^n) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} y_{nK}^o - y_B^o(L_{nK}^B + y_n^o\delta_K^B + \nu_n^i L_{iK}^B) - (y_n^o - y_B^o L_n^B)(y_n^o\delta_K^n + L_n^A H_{AK}^n + \nu_n^i L_{iK}^n) = 0, \\ y_{AK}^o - y_B^o y_A^o\delta_K^B - (y_n^o y_B^o\Lambda_n^B)(y_A^o\delta_K^n + H_{AK}^n) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

.

Следуя работе [3], доказано, что при m-r ≥ 2 для H(L)-распределения в P_n условия (9) являются следствиями соотношений (8). Если выполнены условия (8), то непосредственно убеждаемся, что

a) оснащающая плоскость Картана $C_{n-\ell-1}(\nu_n^i)$ L-распределения неподвижна и является плоскостью Кенигса нормали ν_n^i, т. к.

$$y_A^0 = -\Lambda_A^0, \qquad y_n^0 = \varphi_n^0 - \Lambda_n^A\Lambda_A^0 = \hat{\sigma}_n^0;$$

b) компоненты тензора кривизны-кручения $\overset{1}{\sigma}{}_{\bar{i}KL}^{\bar{j}}$ (6) обращаются в нуль, т.е. пространство $\overset{1}{\Pi}_{n,\ell}$ является плоским. Таким образом доказана

Теорема 1. *На оснащенном в смысле Нордена-Картана базисном L-распределении данного S-распределения индуцируется первая линейная проективная связность* $\overset{1}{\sigma}$, *определенная путем проектирования. Слоевые формы* $\overset{1}{\sigma}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}}$ *соответствующего пространства проективной связности* $\overset{1}{\Pi}_{n,\ell}$ *имеют вид (3), а компоненты тензора кривизны-кручения* $\overset{1}{\sigma}{}_{\bar{i}KL}^{\bar{j}}$ *этого пространства определены формулами (6). При* $\ell \geq 2$ *при любом смещении центра* A_0 *S-распределения* *оснащающая плоскость $C_{n-\ell-1}(\nu^i_n)$ в смысле Картана L-распределения не выходит из нормали 1-го рода ν^i_n тогда и только тогда, когда она неподвижна. При этом плоскость $C_{n-\ell-1}(\nu^i_n)$ является плоскостью Кенигса нормали ν^i_n, а пространство $\overset{1}{Đ}_{n,\ell}$ является плоским.*

§2. Двойственные проективные связности, ассоциированные с L-распределением

1. Другую линейную связность проективного типа на оснащенном в смысле Нордена-Картана L-распределении можно задать согласно [3] системой форм $\{\omega^J_0, \theta^{\bar{j}}_{\bar{i}}\}$, где слоевые формы $\theta^{\bar{j}}_{\bar{i}}$ получаются преобразованием вида:

$$\theta^{\bar{j}}_{\bar{i}} = \overset{1}{\sigma}{}^{\bar{j}}_{\bar{i}} + \Gamma^{\bar{j}}_{iK}\omega^K_0. \tag{9}$$

Полагая $\Gamma^j_{0P} = 0$, $\Gamma^0_{0P} = 0$ и требуя, чтобы система слоевых форм $\theta^{\bar{j}}_{\bar{i}}$ удовлетворяла структурным уравнениям Картана-Лаптева [5],[6], приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}\nabla\Gamma^j_{iP} + \Gamma^j_{iP}\omega^0_0 = \Gamma^j_{iPQ}\omega^Q_0,\ \ \nabla\Gamma^0_{in} + 2\Gamma^0_{in}\omega^0_0 - \Gamma^0_{ik}\omega^k_n - \Gamma^0_{iA}\omega^A_n + \Gamma^k_{in}\omega^0_k = \Gamma^0_{inQ}\omega^Q_0,\\ \nabla\Gamma^j_{iA} + \Gamma^j_{iA}\omega^0_0 = \Gamma^j_{iAQ}\omega^Q_0,\ \ \nabla\Gamma^j_{in} + \Gamma^j_{in}\omega^0_0 - \Gamma^j_{ik}\omega^k_n - \Gamma^j_{iA}\omega^A_n = \Gamma^j_{inQ}\omega^Q_0,\\ \nabla\Gamma^0_{ij} + 2\Gamma^0_{ij}\omega^0_0 + \Gamma^k_{ij}\omega^0_k = \Gamma^0_{ijQ}\omega^Q_0,\ \ \nabla\Gamma^0_{iA} + 2\Gamma^0_{iA}\omega^0_0 + \Gamma^k_{iA}\omega^0_k = \Gamma^0_{iAQ}\omega^Q_0.\end{gathered} \tag{10}$$

Для S-распределения с полем симметрического тензора L^n_{ij} уравнениям (10) в силу (2) и уравнений

$$\nabla d^n_{ijk} + 2d^n_{ijk}\omega^0_0 = d^n_{ijkL}\omega^L_0,\quad \nabla\ell_i + \ell_i\omega^0_0 + \omega^0_i - \ell^n_{ik}\omega^k_n = \ell_{iK}\omega^K_0$$

удовлетворяют следующие охваты:

$$\begin{gathered}\Gamma^k_{ij} = \ell^{kl}_n d^n_{lij},\quad \Gamma^0_{ij} = \Gamma^k_{ij}\ell_k + d^n_{kij}\nu^k_n,\quad \Gamma^k_{in} = -\Gamma^k_{ij}\nu^j_n - \Gamma^k_{iA}L^A_n,\\ \Gamma^0_{iA} = \Gamma^k_{iA}\ell_k + \Gamma^k_{iA}\ell^n_{kj}\nu^j_n,\quad \Gamma^0_{in} = -\Gamma^0_{ij}\nu^j_n - \Gamma^0_{iA}\nu^A_n.\end{gathered} \tag{11}$$

В формулах (11) в качестве тензора Γ^k_{iA} возьмем один из следующих охватов:

$$\Gamma^k_{iA} = \psi^k_{iA} \overset{\text{def}}{=} H^k_{Ai} + \acute{o}^0_A\delta^k_i, \tag{12}$$

$$\Gamma^k_{iA} = D^k_{iA} \overset{\text{def}}{=} \ell^{k\ell}_n d^n_{\ell iA}, \tag{13}$$

где

$$d^n_{\ell iA} = \ell^n_{\ell iA} - \ell^n_{\ell i}(y^0_A - \Psi^n_{AB}\,☹^B_n - L^n_{jA}\nu^j_n) + (\ell^n_{\ell j}L^n_{iA} + \ell^n_{ji}L^n_{\ell A})\nu^j_n. \tag{14}$$

Формы $\theta_{\bar{i}}^{\bar{j}}$ (9) с охватами (11), (12) обозначим $\overset{2}{\sigma}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}}$, а с охватами (11), (13) через $\overset{3}{\sigma}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}}$. Соответствующие пространства с линейной связностью проективного типа обозначим через $\overset{2}{P}_{n,\ell}$ и $\overset{3}{P}_{n,\ell}$. Слоевые формы этих пространств имеют вид:

$$\begin{cases} \overset{2}{\sigma}{}_0^i = \overset{1}{\sigma}{}_0^i, \overset{2}{\sigma}{}_0^0 = \overset{1}{\sigma}{}_0^0, \overset{2}{\sigma}{}_i^j = \overset{1}{\sigma}{}_i^j + \ell_n^{jk} d_{ki\ell}^n \overset{1}{\sigma}{}_0^\ell + \Psi_{iA}^j \overset{1}{\sigma}{}_0^A, \\ \overset{2}{\sigma}{}_i^0 = \overset{1}{\sigma}{}_i^0 + (\ell^{k\ell} d_{\ell ij} \ell_k + d_{\ell ij}^n \nu_n^\ell) \overset{1}{\sigma}{}_0^j + \Psi_{iA}^j (b_j + \ell_{jk}^n \nu_n^k) \overset{1}{\sigma}{}_0^A; \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \overset{3}{\sigma}{}_0^i = \overset{1}{\sigma}{}_0^i, \overset{3}{\sigma}{}_0^0 = \overset{1}{\sigma}{}_0^0, \overset{3}{\sigma}{}_i^k = \overset{1}{\sigma}{}_i^k + \ell_n^{k\ell} d_{\ell ij}^n \overset{1}{\sigma}{}_0^j + D_{iA}^k \overset{1}{\sigma}{}_0^A, \\ \overset{3}{\sigma}{}_i^0 = \overset{1}{\sigma}{}_i^0 + (\ell_n^{k\ell} d_{\ell ij}^n \ell_k + d_{\ell ij}^n \nu_n^\ell) \overset{1}{\sigma}{}_0^j + D_{iA}^k (\ell_k + \ell_{kj}^n \nu_n^j) \overset{1}{\sigma}{}_0^A, \end{cases} \tag{16}$$

где $\overset{1}{\sigma}{}_0^A = \omega_0^A - L_n^A \omega_0^n$.

Преобразование форм связности по законам (15), (16) обозначим соответственно через J_2, J_3. Доказано аналогично [3], что $J_3 = J_3^{-1}$ и $J_2 = J_2^{-1} \Leftrightarrow D_{iA}^k = 0$.

Теорема 2. *Оснащенное в смысле Нордена-Картана регулярное базисное L-распределение данного S-распределения в P_n, кроме первой линейной связности проективного типа $\overset{1}{\sigma}$ (3) в случае симметрии основного тензора L_{ij}^n индуцирует еще две линейные связности $\overset{2}{\sigma}, \overset{3}{\sigma}$ проективного типа, определяемые соответственно системами форм (15), (16), при этом*

a) пространства проективной связности $\overset{1}{P}_{n,\ell}$ и $\overset{3}{P}_{n,\ell}$ являются всегда двойственными;

b) пространства $\overset{1}{P}_{n,\ell}$ и $\overset{2}{P}_{n,\ell}$ двойственны тогда и только тогда, когда

$$\Psi_{iA}^k \overset{\text{def}}{=} H_{Ai}^k + y_A^0 \delta_i^k = 0. \tag{17}$$

В этом случае все три пространства $\overset{1}{P}_{n,\ell}$; $\overset{2}{P}_{n,\ell}$; $\overset{3}{P}_{n,\ell}$ попарно двойственны между собой.

2. Пусть оснащенное в смысле Нордена-Картана L-распределение является голономным. В этом случае при смещении центра A_0 S-распределения вдоль кривых L:

$$\omega_0^{\hat{A}} = 0, \omega_0^i = \mu^i \theta, D\theta = \theta \wedge \theta_0^0, \nabla\mu^i - \mu^i(\theta_0^0 + \omega_0^0) = \bar{\mu}^i \theta, \tag{18}$$

принадлежащих L-распределению, имеем $\omega_0^n = \omega_0^A = 0$ и, следовательно, $\overset{1}{\sigma}{}_0^A = \omega_0^A - L_n^A \omega_0^n = 0$. Тогда из соотношений (15), (16) следует $\overset{2}{\sigma} \equiv \overset{3}{\sigma}$, т.е. связности пространств $\overset{2}{P}_{\ell,\ell}$ и $\overset{3}{P}_{\ell,\ell}$ совпадают. Отсюда, на основании теоремы 2 следует, что пространства $\overset{2}{P}_{\ell,\ell}$ и $\overset{3}{P}_{\ell,\ell}$ всегда двойственны. В силу геометрической интерпретации голономности L-распределения [1], приходим к предложению.

Теорема 3. *Оснащение в смысле Нордена-Картана*

a) регулярной ℓ-мерной гиперполосы $H_r(M)$, оснащенной полем касательных m-мерных плоскостей ($\ell<m<n-1$);

b) регулярной ℓ-мерной гиперполосы H_ℓ, оснащенной полем Λ-плоскостей так, что в каждом центре A_0: $A_0 \in \Lambda(A_0) \subset \Psi(A_0)$;

c) ℓ-мерной полосы $V_{\ell(m)}$ порядка m, оснащенной полем касательных гиперплоскостей H;

d) вырожденной центрированной нераспадающейся m-мерной гиперполосы H_m^ℓ ранга ℓ индуцирует два пространства проективной связности $\overset{1}{P}_{\ell,\ell}$ и $\overset{2}{P}_{\ell,\ell}$, ассоциированных с указанными многообразиями a)- d), причем эти пространства двойственны относительно инволютивного преобразования J_2 (15).

Замечание. Для регулярных гиперполос пространства проективной связности $P_{n,n}$ и проективного пространства P_n результаты, аналогичные теореме 3, получены А.В Столяровым [7].

3. Выясним геометрическую интерпретацию аналитического условия (17) двойственности пространств $\overset{1}{P}_{n,\ell}$ и $\overset{2}{P}_{n,\ell}$. При смещении центра A_0 S-распределения вдоль кривых L (18), принадлежащих базисному L-распределению, из (7) с учетом (1) получим

$$d\hat{M}_A = \theta_A^0 A_0 + (H_{Ai}^k + y_A^0 \delta_i^k)\mu^i \theta A_k + \omega_A^B \hat{M}_B (\mathrm{mod}\, L). \qquad (19)$$

Из соотношений (19) в силу (17) следует

Теорема 4. *Для регулярного оснащенного в смысле Нордена-Картана L-распределения пространства $\overset{1}{P}_{n,\ell}$ и $\overset{2}{P}_{n,\ell}$ двойственны тогда и только тогда, когда при смещении центра A_0 S-распределения вдоль любой кривой L (18), принадлежащей его базисному L-распределению, смещение оси $[\hat{K}_A]$ = $=[A_A - \Lambda_A^0 A_0]$ плоскости Картана $C_{n-\ell-1}(A_0)$ принадлежит характеристике $\Psi_{n-\ell-1}(A_0)$ оснащающего H-распределения гиперплоскостных элементов. При этом ось $[\hat{K}_A]$ совпадает с осью Кенигса.*

4. Найдем условия совпадения связностей $\overset{1}{\sigma}$, $\overset{2}{\sigma}$, $\overset{3}{\sigma}$. Из (15) непосредственно получаем инвариантные аналитические условия совпадения связностей $\overset{1}{\sigma}$ и $\overset{2}{\sigma}$ пространств $\overset{1}{P}_{n,\ell}$ и $\overset{2}{P}_{n,\ell}$:

$$\overset{1}{\sigma} \equiv \overset{2}{\sigma} \Leftrightarrow (\Psi_{iA}^k = 0(a), d_{ijk}^n = 0(b)). \qquad (20)$$

В силу теоремы 2 условие (20a) означает, что пространства $\overset{1}{P}_{n,\ell}$ и $\overset{2}{P}_{n,\ell}$ двойственны. Для голономного H(L)-распределения или взаимного H(L)-распределения с полем симметрического тензора в силу (16), (17) получим $d^n_{ijk} = D^n_{ijk}$.

Условие (20b) означает, что соприкасающиеся гиперквадрики поля

$$\ell^n_{ij}x^i x^j + S^n_{pq}x^p x^q + S^n_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2\ell_i x^i x^n + 2\Lambda^n_{p\alpha}x^\alpha x^p + 2S_p x^p x^n + 2S_\alpha x^\alpha x^n + \\ + \ell_n x^n x^n = 2x^0 x^n \quad (21)$$

имеют соприкосновение 3-го порядка с L-распределением. Справедливы следующие утверждения:

Теорема 5. *1) Для регулярного L-распределения с полем симметричного тензора* L^n_{ij}*, оснащенного в смысле Нордена-Картана, связности* $\overset{1}{\sigma}$ *и* $\overset{2}{\sigma}$ *пространств* $\overset{1}{P}_{n,\ell}$ *и* $\overset{2}{P}_{n,\ell}$ *совпадают тогда и только тогда, когда выполнены условия (20).*

2) Для голономного L-распределения или взаимного H(L)-распределения с полем симметричного тензора L^n_{ij} *связности* $\overset{1}{\sigma}$ *и* $\overset{2}{\sigma}$ *совпадают тогда и только тогда, когда пространства* $\overset{1}{P}_{n,\ell}$ *и* $\overset{2}{P}_{n,\ell}$ *двойственны и соприкасающиеся гиперквадрики поля (21) имеют соприкосновение 3-го порядка с L-распределением.*

Из (16) непосредственно вытекает

Теорема 6. *Связности* $\overset{1}{\sigma}$ *и* $\overset{3}{\sigma}$ *пространств* $\overset{1}{P}_{n,\ell}$ *и* $\overset{3}{P}_{n,\ell}$ *совпадают тогда и только тогда, когда*

$$D^n_{iA} = 0(a), d^n_{ijk} = 0(b), \quad (22)$$

что равносильно условиям

$$d^n_{ijA} = 0(a), d^n_{ijk} = 0(b). \quad (23)$$

При этом ось [$\hat{M}_A = \hat{K}_A + \acute{o}^0_A A_0$*] оснащения Картана L-распределения задается функциями*

$$\acute{o}^0_A = \frac{1}{\ell}\ell^n_{ijA}\ell^{ij}_n + \frac{\ell+2}{\ell}L^n_{jA}\nu^j_n + \Psi^n_{AB}L^B_n. \quad (24)$$

Действительно, условия (23a) получены из (22a) и (13), а охваты (24) функций $\acute{o}^0_A$ находятся из (14) и (23a).

5. Пусть для голономного L-распределения оснащающая плоскость $\boldsymbol{C}_{n-\ell-1}$ Картана неподвижна. В этом случае согласно теореме 1 выполняются равенства (8), (9) и, кроме того, плоскость $\boldsymbol{C}_{n-\ell-1}$ является плоскостью Кенигса нормали

$\{\nu_n^i\}$, а пространство $\overset{1}{P}_{n,\ell}$ является плоским, т.е. $\overset{1}{\sigma}{}^{\bar{j}}_{\bar{i}PQ} = 0$. Из (12) и (8) получим $\Gamma^k_{iA} = \Psi^k_{iA} = 0$. Учитывая (16), убеждаемся, что компоненты тензоров кручения $\{\overset{2}{\sigma}{}^k_{0PQ}\}$ и $\{\overset{1}{\sigma}{}^k_{0PQ}\}$ пространств $\overset{2}{P}_{n,\ell}$ и $\overset{1}{P}_{n,\ell}$ связаны такими соотношениями:

$$\begin{gathered} \overset{2}{\sigma}{}^k_{0ij} = \overset{1}{\sigma}{}^k_{0ij} - \Gamma^k_{[ij]}, \quad \overset{2}{\sigma}{}^k_{0AB} = \overset{1}{\sigma}{}^k_{0AB}, \quad \overset{2}{\sigma}{}^k_{0iA} = \overset{1}{\sigma}{}^k_{0iA} - \Gamma^k_{[iA]}, \\ \overset{2}{\sigma}{}^k_{0An} = \overset{1}{\sigma}{}^k_{0An} - \Gamma^k_{\ell[A}\nu^\ell_{n]}, \quad \overset{2}{\sigma}{}^k_{0in} = \overset{1}{\sigma}{}^k_{0in} - \Gamma^k_{\ell[i}\nu^\ell_{n]} - \Gamma^k_{[in]}. \end{gathered} \tag{25}$$

Из соотношений (25) в силу (11), (12), $\Gamma^k_{iA} = \Psi^k_{iA} = 0$, $\overset{1}{\sigma}{}^{\bar{j}}_{\bar{i}PQ} = 0$ получим $\overset{2}{\sigma}{}^k_{0PQ} = 0$, т.е. пространство $\overset{2}{P}_{n,\ell}$ имеет нулевое кручение и является двойственным пространству $\overset{1}{P}_{n,\ell}$.

Следовательно, имеет место

Теорема 7. *Оснащение голономного L-распределения в смысле Нордена-Картана с неподвижной плоскостью* $C_{n-\ell-1}$ *(*$\ell \geq 2$*) индуцирует пространство* $\overset{2}{P}_{n,\ell}$ *с нулевым кручением, двойственное пространству* $\overset{1}{P}_{n,\ell}$.

Библиографический список

1. *Волкова С.Ю.* $\hat{H}(\Lambda, L)$-распределения проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1991. №22. С.23-25.

2. *Волкова С.Ю.* Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\hat{H}(\Lambda, L)$-распределением // Там же. 1992. №23. С.15-23.

3. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1992. 290 с.

4. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

5. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Там же. 1973. Т.4. С.7-70.

6. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. 246 с.

7. *Столяров А.В.* Дифференциальная геометрия полос // Там же. 1978. Т.10. С.25-54.

S.Yr. V o l k o v a

DUAL PROJECTIVE CONNECTIONS

OF THE S-DISTRIBUTION

Three projective connections of the base distribution of S-distribution in the projective space are constructed . Scopes of curvature-torsion tensors for there connection are obtained. Three connections coinsidence conditions and conditions of duality of projective connection corresponding space are found. It is shown, that equipment of holonomic L-distribution in Norden-Cartan sense unduces second projective connection with zero torsion space dual to the first one.