наты даны в репере $\tilde{\mathcal{R}}^{A}$) лежат на кривой $\bar{K}^2$.

Прямые (AC^*) и $(B\bar{C}^*)$ – касательные к кривой $\bar{K}^2$ соответственно в точках A и B . Точки $C_1, C_3 = A_3$ $(\vec{C}_3 = \gamma^3 \vec{A}_3)$, $C^*, \bar{C}^*$ лежат на одной прямой и их сложное отношение $(C_1 C_3, C^* \bar{C}^*) = (\gamma_1^1)^2 : (\gamma_3^3)^2 > 0$. Следовательно, пары C_1, C_3 и $C^*, \bar{C}^*$ не могут разделять друг друга гармонически.

Поляра точки C_1 пересекает прямую (AB) в точке S: $\vec{S} = -\gamma_3^3 \vec{A} + \gamma_1^1 \vec{B}$, а поляра точки C_3 – в точке $\mathcal{D}$: $\vec{\mathcal{D}} = -\gamma_1^1 \vec{A} + \gamma_3^3 \vec{B}$. А это означает, что прямые $(C_1 S)$, $(C_3 \mathcal{D})$ – касательные к кривой $\bar{K}^2$ в точках C_1 и C_2 соответственно, причем $(AB, S\mathcal{D}) = (\gamma_3^3)^2 : (\gamma_1^1)^2$. Из положительности сложного отношения $(AB, S\mathcal{D})$ следует, что пары A, B и $S, \mathcal{D}$ тоже никогда не разделяют друг друга.

В рассматриваемом отображении f $\gamma_1^1 \neq \gamma_3^3$, поэтому сложные отношения $(C_1 C_3, C^* \bar{C}^*)$, $(AB, S\mathcal{D})$ равны единице тогда и только тогда, когда $\gamma_1^1 = -\gamma_3^3$. При этом касательные (AC^*) и $(B\bar{C}^*)$ пересекают прямую $\tilde{C}$ в точке $C^* = \bar{C}^*$, которая является четвертой гармонической точке C относительно пары точек C_1 и C_3 , а касательные $(C_1 S)$, $(C_3 \mathcal{D})$ пересекаются в точке $S = \mathcal{D}$, которая составляет гармоническую четверку с точкой C относительно пары точек A и B . При условии $\gamma_1^1 = -\gamma_3^3$ сложное отношение

$$(AB, N_1^1 N_3^3) = -1 .$$

Итак, если пары точек A, B и N_1^1, N_3^3 гармонически разделяют друг друга, то полюсом прямой (AB) относительно кривой $\bar{K}^2$ будет точка C^* , четвертая гармоническая точке C относительно точек C_1, C_3 , а полюсом прямой $\tilde{C}$ – точка S – четвертая гармоническая точке C относительно пары точек A и B . В этом случае полярой точки C , будет прямая $(C^* \mathcal{D})$; прямая $(C^* N_3^3)$ – поляра точки N_1^1 , а прямая $(C^* N_1^1)$ – поляра точки N_3^3 относительно кривой $\bar{K}^2$.

II с л у ч а й. Пусть (AB) – двойное направление распределения Δ_2 . Тогда существует еще одно 2-распределение $\tilde{\Delta}_2$ двойных линий. В каждой точке A плоскость $\tilde{\Delta}_2(A)$ совпадает с плоскостью, проходящей через прямую (AB) и прямую $\Delta_1(A)$. Двойные направления плоскости $\tilde{\Delta}_2(A)$ пересекаются на прямой $(A_3 \mathcal{D})$, $\vec{\mathcal{D}} = -\gamma_1^1 \vec{A} + \gamma_3^3 \vec{B}$, причем $(AB, C\mathcal{D}) = (AB, N_3^3 N_1^1)$.

III с л у ч а й. Направление (AB) совпадает с направлением I-распределения Δ_1 . Можно показать, что любое направление (AL) области Ω – двойное в отображении f . Касательные к двойным линиям будут пересекаться в точках двумерной плоскости $(A_1 A_2 S)$, $\vec{S} = -\gamma_3^3 \vec{A} + \gamma_1^1 \vec{B}$, где $(AB, CS) = (AB, N_1^1 N_3^3)$.

З а м е ч а н и е. В докладе [3] решена аналогичная задача о всем множестве двойных линий для отображения, имеющего два двумерных распределения двойных линий, касательные к которым пересекаются в нормализующей плоскости.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1975. Вып.6. С.19-25.

2. К и р е е в а С.В. Об одном классе отображений // Дифференциальная геометрия многообразий фигур : Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.39-41.

3. К и р е е в а С.В. Двойные линии отображения и корреляции в P_4 // Междунар. науч. конф. "Лобачевский и современная геометрия": Тез. докл. Казань, 1992. Ч.I. С.40.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ОРИСФЕР СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ АССОЦИИРОВАННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

В.С.М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном пространстве Лобачевского $Л_3$ в интерпретации Кэли-Клейна исследуются подклассы конгруэнций орисфер со специальными свойствами ассоциированных геометрических образов: собственной фокальной поверхности $(\mathcal{F})$ [1, с.50] и прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ^*) , где $\ell \equiv A_0 \mathcal{F}$, A_0 – несобственная точка орисферы, ℓ^* –прямая, полярно сопряженная прямой ℓ относительно абсолюта Q_0 проективного пространства $\mathcal{P}_3$. Доказано, что торсы прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ^*) соответствуют. Если поверхность $(\mathcal{F})$ вырождается в линию, то касательная к ней проходит через один из фокусов луча ℓ^* . Изучены конгруэнции орисфер, у которых прямолинейная конгруэнция (ℓ) вырождается в связку прямых и конгруэнции орисфер с плоской фокальной поверхностью $(\mathfrak{F})$.

1. Отнесем конгруэнцию O^* орисфер к частично канонизированному реперу $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_3 – точка пересечения с абсолютом Q_0 прямой ℓ, а вершины A_1 и A_2 расположены на прямой ℓ^* и полярно сопряжены между собой. Осуществляя надлежащую нормировку вершин репера, приводим уравнения абсолюта Q_0 и орисферы $Q \in O^*$ соответственно к виду:

$$\mathfrak{F} \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - 2\, x^0 x^3 = 0, \tag{1.1}$$

$$\Phi \equiv 2(x^3)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 - 2x^0 x^3 = 0. \tag{1.2}$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции O^* орисфер состоит из вполне интегрируемой подсистемы

$$\begin{cases} \omega_i^3 = \omega^i, \quad \omega_3^i = \omega_i^0, \quad \omega_3^0 = 0, \; \omega_0^3 = 0, \\ \omega_1^2 + \omega_2^1 = 0, \quad \omega_1^1 = 0, \quad \omega_2^2 = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

характеризующей инвариантность абсолюта Q_0, и системы:

$$\omega_0^0 = 0, \qquad \omega_i^0 = b_i \omega^i + b_0 \omega^j. \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем $\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i$, $j, i, k = 1,2;\; i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Фокальная точка $\mathfrak{F}$ задается формулой

$$\mathfrak{F} = A_0 + A_3, \tag{1.5}$$

т.е. совпадает с единичной точкой ребра ℓ. Дифференцируя (1.5) с учетом (1.3), (1.4), получим:

$$d\mathfrak{F} = \left((1+b_1)\omega^1 + b_0\omega^2\right) A_1 + \left(b_0\omega^1 + (1+b_2)\omega^2\right) A_2. \tag{1.6}$$

Т е о р е м а 1. Торсы ассоциированных прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ^*) соответствуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения торсов прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ^*) имеют вид:

$$(A_0 A_3\, dA_0\, dA_3) = 0, \qquad (A_1 A_2\, dA_1\, dA_2) = 0. \tag{1.7}$$

Учитывая (1.3), (1.4), получим одно и то же уравнение:

$$b_0 (\omega^1)^2 + (b_2 - b_1)\,\omega^1\omega^2 - b_0 (\omega^2)^2 = 0. \tag{1.8}$$

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией O_0^* называется такая конгруэнция орисфер, у которой ассоциированная прямолинейная конгруэнция (ℓ) есть связка прямых.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции O_0^* существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуя, чтобы точка $B = \lambda A_0 - A_3$ была неподвижной, получим: $dB = tB$. Откуда следует, что $b_0 = 0$,

$b_1 = b_2 = \lambda$. Учитывая эти соотношения в системе (1.4), приводим систему уравнений Пфаффа конгруэнции O_0^* к виду (1.3) и

$$\omega_0^0 = 0, \quad \omega_1^0 = b_1\omega^1, \quad \omega_2^0 = b_1\omega^2, \quad db_1 = 0. \tag{1.9}$$

Система (1.3), (1.10) вполне интегрируема. Точка

$$B = b_1 A_0 - A_3 \tag{1.10}$$

является центром связки (ℓ).

З а м е ч а н и е. При $b_1 = -1$ точка B совпадает с фокальной точкой $\mathfrak{F}$ орисферы, и конгруэнция O_0^* становится конгруэнцией орисфер с вырождающейся в точку фокальной поверхностью.

Из (1.6) следует, что условие вырождения фокальной поверхности $(\mathfrak{F})$ конгруэнции O^* в линию или точку имеет вид:

$$(b_1+1)(b_2+1) + b_0^2 = 0. \tag{1.11}$$

Учитывая соотношения

$$b_0 = 0, \quad b_1 = b_2, \tag{1.12}$$

характеризующие конгруэнции O_0^*, приходим к следующему результату:

Т е о р е м а 3. Если фокальная поверхность $(\mathfrak{F})$ конгруэнции O_0^* вырождается, то $\mathfrak{F}$ – неподвижная точка.

2. Уравнение асимптотических линий фокальной поверхности $(\mathfrak{F})$ конгруэнции O^* имеет вид:

$$(b_0^2 + b_1^2 - 1)(\omega^1)^2 + 2b_0(b_1 + b_2)\,\omega^1\omega^2 + (b_0^2 + b_2^2 - 1)(\omega^2)^2 = 0 \tag{2.1}$$

Рассмотрим случай, когда поверхность $(\mathfrak{F})$ является плоскостью, т.е. когда уравнение (2.1) обращается в тождество и выполняется неравенство

$$(b_1+1)(b_2+1) + b_0^2 \neq 0, \tag{2.2}$$

характеризующее невырождаемость в линию или точку поверхности $(\mathfrak{F})$. Следовательно,

$$b_0^2 + b_1^2 - 1 = 0, \quad b_0(b_1 + b_2) = 0, \quad b_0^2 + b_2^2 - 1 = 0. \tag{2.3}$$

Т е о р е м а 4. Существуют три и только три попарно непересекающихся класса конгруэнций орисфер с плоской фокальной поверхностью $(\mathfrak{F})$, каждый из которых определяется вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Анализируя соотношения (2.3) с учетом неравенства (2.3), убеждаемся, что возможны только три случая:

10*

1) $b_0=0$, $b_1=b_2=1$; 2) $b_1=\sqrt{1-b_0^2}=-b_2$; 3) $b_2=\sqrt{1-b_0^2}=-b_1$, (2.4)

которые приводят к трем вполне интегрируемым системам, состоящим из уравнений (I.3) и соответственно уравнений:

$$\omega_0^0=0\,,\quad \omega_1^0=\omega^1\,,\quad \omega_2^0=\omega^2\,; \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} \omega_0^0=0\,,\ \omega_1^0=\sqrt{1-b_0^2}\,\omega^1+b_0\omega^2\,,\ \omega_2^0=b_0\omega^1-\sqrt{1-b_0^2}\,\omega^2, \\ db_0+2\sqrt{1-b_0^2}\,\omega_1^2=0 \quad (b_0\neq 0); \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} \omega_0^0=0\,,\ \omega_1^0=-\sqrt{1-b_0^2}\,\omega^1+b_0\omega^2\,,\ \omega_2^0=b_0\omega^1+\sqrt{1-b_0^2}\,\omega^2, \\ db_0-2\sqrt{1-b_0^2}\,\omega_1^2=0 \quad (b_0\neq 0). \end{cases} \tag{2.7}$$

Назовем конгруэнции, определяемые этими системами, соответственно, конгруэнциями $O_{0,1}^*$; O_1^* и O_{-1}^*. Конгруэнции $O_{0,1}^*$ являются подклассом конгруэнций O_0^*. Центром связки (ℓ), ассоциированной с конгруэнцией $O_{0,1}^*$, является точка $B^*=A_0-A_3$, гармонически сопряженная фокальной точке $\mathcal{F}$ относительно A_0 и A_3.

3. Исключим в дальнейшем из рассмотрения конгруэнции O_0^*. Используя уравнения

$$\delta b_1=2b_0\pi_1^2,\quad \delta b_2=-2b_0\pi_1^2,\ \delta b_0=(b_2-b_1)\pi_1^2, \tag{3.I}$$

где δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам, осуществим следующую фиксацию оставшегося вторичного параметра:

$$b_0=0,\quad b_2-b_1\neq 0. \tag{3.2}$$

Геометрически такая фиксация означает совмещение вершины A_1 с одним из фокусов луча ℓ^* прямолинейной конгруэнции (ℓ^*). Тогда вершина A_2 совместится со вторым фокусом этого луча, т.к. фокусы луча ℓ^* полярно сопряжены относительно абсолюта Q_0.

Система уравнений Пфаффа конгруэнции O^*, не являющейся конгруэнцией O_0^*, состоит в построенном каноническом репере из уравнений (I.3) и уравнений:

$$\omega_0^0=0\,,\quad \omega_1^0=b_1\omega^1,\quad \omega_2^0=b_2\omega^2,\quad \omega_1^2=m_1\omega^1+m_2\omega^1. \tag{3.3}$$

Замыкая систему (3.3), получим:

$$\begin{cases} db_1\wedge\omega^1+m_1(b_1-b_2)\,\omega^1\wedge\omega^2=0\,,\ db_2\wedge\omega^2+m_2(b_2-b_1)\omega^1\wedge\omega^2=0\,, \\ dm_1\wedge\omega^1+dm_2\wedge\omega^2+(m_1^2+m_2^2-b_1-b_2)\,\omega^1\wedge\omega^2=0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Т е о р е м а 5. Прямолинейная конгруэнция (ℓ^*), ассоциированная с конгруэнцией O^*, гармонична ее фокальной поверхности $(\mathcal{F})$, а прямолинейная конгруэнция (ℓ) сопряжена поверхности $(\mathcal{F})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В каноническом репере торсы ассоциированных прямолинейных конгруэнций (ℓ^*) и (ℓ) соответствуют координатной сети на поверхности $(\mathcal{F})$. Уравнение асимптотических линий на $(\mathcal{F})$ имеет вид:

$$(b_1^2-1)\,(\omega^1)^2+(b_2^2-1)\,(\omega^2)^2=0\,, \tag{3.5}$$

поэтому сеть координатных линий сопряжена на $(\mathcal{F})$, причем луч ℓ^* лежит в касательной плоскости к поверхности $(\mathcal{F})$, т.к.

$$d\mathcal{F}=(b_1+1)\,\omega^1A_1+(b_2+1)\,\omega^2A_2. \tag{3.6}$$

4. О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией O_2^* называется конгруэнция O^* с вырождающейся в линию фокальной поверхностью $(\mathcal{F})$.

Из этого определения и теоремы 3 следует, что конгруэнция O_2^* не может быть конгруэнцией O_0^*. Следовательно, конгруэнцию O_2^* можно исследовать в построенном каноническом репере. Условие (I.II) вырождения поверхности $(\mathcal{F})$ в линию принимает вид:

$$(b_1+1)(b_2+1)=0, \tag{4.I}$$

причем величины b_1+1 и b_2+1 одновременно в нуль не обращаются.

Т е о р е м а 6. Если фокальная поверхность $(\mathcal{F})$ конгруэнции орисфер вырождается в линию, то касательная к ней проходит через один из фокусов луча ℓ^* ассоциированной прямолинейной конгруэнции (ℓ^*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3.6) следует, что если $b_1+1=0$, $b_2+1\neq 0$ или $b_2+1=0$, $b_1+1\neq 0$, то точка $\mathcal{F}$ описывает линию, касательная к которой проходит через фокус A_2 или фокус A_1.

Система (3.3), (3.4) при $b_2+1=0$ приводится к виду:

$$\omega_0^0=0,\quad \omega_1^0=b_1\omega^1,\quad \omega_2^0+\omega^2=0,\quad \omega_1^2=m_1\omega^1, \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} db_1\wedge\omega^1+m_1(b_1+1)\,\omega^1\wedge\omega^2=0, \\ dm_1\wedge\omega^1+(m_1^2-b_1+1)\,\omega^1\wedge\omega^2=0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Для $b_1+1=0$ получаем аналогичный результат. Следовательно, существуют два и только два класса конгруэнций O_2^*, каждый из которых определяется с произволом двух функций одного аргумента.

Библиографический список

I. Малаховский В.С. О конгруэнциях орициклов и орисфер в пространстве Лобачевского // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. Вып.2I. С.47–50.

УДК 514.75

СЕМЕЙСТВА ОСНАЩЕННЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Н.В.Малаховский

(Калининградский государственный университет)

Исследуются n-параматрические семейства $\hat{\Pi}_n$ невырожденных проективных преобразований $\hat{\pi}: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, отображающих заданную точку $X_0 \in \mathcal{P}_n$ в заданную точку $Y_0 \in \mathcal{P}_n$, причем точки X_0 и Y_0 описывают n-мерные области $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ в пространстве $\mathcal{P}_n$. Построены поля геометрических объектов на многообразии $\hat{\Pi}_n$, дана их геометрическая характеристика. Найдены нормализации пространства $\mathcal{P}_n$ и определяемые ими аффинные связности.

§ I. Поля геометрических объектов на семействе $\hat{\Pi}_n$

Отнесем пространство $\mathcal{P}_n$ к реперу $\{A_{J'}\}$, где $A_0 \equiv X_0$, $A_n = Y_n$. Так как в окрестности $\mathcal{U}$ точки A_0 однородная проективная координата $\tilde{X}^0$ точки $X \in \mathcal{U}$ отлична от нуля, а в окрестности $\hat{\pi}(\mathcal{U})$ точки $Y_0 \in \hat{\pi}(\mathcal{U})$ однородная проективная координата $\tilde{Y}^n$ точки $Y \in \hat{\pi}(\mathcal{U})$ также отлична от нуля, то можно в этих окрестностях ввести неоднородные координаты X^J, Y^α, положив

$$X^J = \frac{\tilde{X}^J}{\tilde{X}^0}, \quad Y^\alpha = \frac{\tilde{Y}^\alpha}{\tilde{Y}^n} \qquad (J, \mathcal{J}, K = \overline{1,n};\ \alpha, \beta, \gamma = \overline{0,n-1}).$$

Тогда проективное преобразование $\hat{\pi} \in \hat{\Pi}_n$ определится соотношениями:

$$Y^\alpha = \frac{\hat{M}^\alpha_J X^J}{1 - \hat{P}_K X^K}. \tag{I.I}$$

При инфинитезимальном изменении репера $\{\bar{A}_{J'}\} \to \{\bar{A}_{J'} + d\bar{A}_{J'}\}$ неоднородные проективные координаты X^J, Y^α преобразуются по закону:

$$X^J \to X^J - X^K \Omega^J_K + X^J X^K \Omega^0_K + X^J \Omega^0_0 - \Omega^J, \tag{I.2}$$

$$Y^\alpha \to Y^\alpha - Y^\beta \Omega^\alpha_\beta + Y^\alpha Y^\beta \Omega^n_\beta + Y^\alpha \Omega^n_n - \Omega^\alpha_n. \tag{I.3}$$

Сравнивая формулы (I.2), (I.3) с левыми частями уравнений (I.3) работы [1], убеждаемся, что семейство Π_n оснащенных коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to P_n$ превращается в семейство $\hat{\Pi}_n$ оснащенных проективных преобразований $\hat{\pi}: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$. При этом надо осуществить следующую замену:

$$x^i \to Y^\alpha,\ \omega^K_i \to \Omega^\beta_\alpha,\ \omega^0_i = \Omega^n_\alpha,\ \omega^i_0 = \Omega^\alpha_n, \tag{I.4}$$

а над компонентами соответствующих объектов будем ставить знак "∧". Тогда (см. [1], (I,6)) система уравнений Пфаффа семейства $\hat{\Pi}_n$ запишется в виде:

$$\begin{cases} \Omega^\alpha_n = \hat{\lambda}^\alpha_J \Omega^J, \quad \nabla \hat{M}^\alpha_J = \hat{M}^\alpha_{JK} \Omega^K, \\ \nabla \hat{P}_J + \Omega^0_J - \hat{M}^\alpha_J \Omega^n_\alpha = \hat{P}_{JK} \Omega^K, \end{cases} \tag{I.5}$$

где

$$\begin{cases} \nabla \hat{M}^\alpha_J = d\hat{M}^\alpha_J - \hat{M}^\alpha_K \Omega^K_J + \hat{M}^\beta_J \Omega^\alpha_\beta + \hat{M}^\alpha_J (\Omega^0_0 - \Omega^n_n), \\ \nabla \hat{P}_J = d\hat{P}_J - \hat{P}_K \Omega^K_J + \hat{P}_J \Omega^0_0. \end{cases} \tag{I.6}$$

Продолжая систему (I.5), получим:

$$\begin{cases} \nabla \hat{\lambda}^\alpha_J = \hat{\lambda}^\alpha_{JK} \Omega^K, \quad \Delta \hat{\lambda}^\alpha_{JK} = \hat{\lambda}^\alpha_{JKL} \Omega^L, \\ \Delta \hat{M}^\alpha_{JK} = \hat{M}^\alpha_{JKL} \Omega^L, \quad \Delta \hat{P}_{JK} = \hat{P}_{JKL} \Omega^L, \end{cases} \tag{I.7}$$

где

$$\begin{cases} \Delta \hat{\lambda}^\alpha_{JK} = \nabla \hat{\lambda}^\alpha_{JK} + \hat{\lambda}^\alpha_{(J} \Omega^0_{K)} - \hat{\lambda}^\alpha_{(J} \hat{\lambda}^\beta_{K)} \Omega^n_\beta, \\ \Delta \hat{M}^\alpha_{JK} = \nabla \hat{M}^\alpha_{JK} + \hat{M}^\alpha_{(J} \Omega^0_{K)} - \hat{M}^{(\alpha}_J \hat{\lambda}^\beta_K \Omega^n_\beta, \\ \Delta \hat{P}_{JK} = \nabla \hat{P}_{JK} + \hat{P}_{(J} \Omega^0_{K)} - \hat{M}^\alpha_{JK} \Omega^n_\alpha, \end{cases} \tag{I.8}$$

а круглые скобки означают циклирование по соответствующим индексам. Здесь величины „$\hat{\lambda}$" симметричны по паре нижних индексов, а величины „$\hat{M}$" и „$\hat{P}$" в общем случае не симметричны