structures (of nonholonomic compositions of Norden) for the χ-distributions and for the Ђ-distributions of the given hyperstrip $H_r(L)$.

УДК 514.76

О СИММЕТРИЯХ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

В.А.И г о ш и н

(Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского)

С помощью пульверизационного моделирования [1], [2] получен ряд теорем о размерностях максимальных алгебр Ли симметрий квазигеодезических потоков (КП) - обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

1. Произвольный КП $f\equiv(M,f)$ на многообразии M локально представляется дифференциальным уравнением

$$d^2x^i/dt^2=f^i(x^j, t, dx^j/dt) \tag{1}$$

$1\le i, j\le n-1 = \dim M$. Все объекты будут предполагаться дифференцируемыми достаточное число раз.

Если функции f^i являются полиномами относительно скоростей dx^j/dt, то КП f называется полиномиальным [3].

Пусть $f\equiv(M,f)$ и $h\equiv(N,h)$ - два КП. Отображение Φ: $\overline{M}=M\times R\to \overline{N}=N\times R$, переводящие интегральные кривые КП f в интегральные кривые КП h называется [4] точечным отображением КП.

В работах [1] и [2] в пространстве событий $\overline{M}=M\times R$ произвольного КП f построена (моделирующая КП f стандартная) обобщенная связность Г, геодезические линии которой совпадают с интегральными кривыми КП f. При этом точечное отображение КП отождествляется с проективным соответствием моделирующих эти КП обобщенных связностей; аффинное соответствие связностей определяет аффинное точечное отображение моделирующих КП. Надо заметить, что в рамках классической теории С.Ли класс аффинных точечных отображений КП не был обнаружен.

Векторное поле X на $\overline{M}$, порождающее однопараметрическую группу проективных (или аффинных) симметрий КП f, будем называть в пределах данной статьи инфинитезимальной проективной (или аффинной) симметрией. Известно, что инфинитезимальные проективные симметрии (ПС) и аффинные симметрии (АС) образуют апгебры Ли симметрий для ланного КП f.

2. С помощью пульверизационного моделирования и классических результатов (см., например, [5] - [7]), относящихся к обобщенным пространствам, получены следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Максимальная размерность алгебры Ли аффинных симметрий (АС) (n-1)-мерного КП (M_{n-1}, f) равна $r=n^2 + n$.

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы (n-1)-мерный КП (M_{n-1}, f) допускал полную алгебру Ли АС максимальной размерности $r=n^2 + n$, необходимо и достаточно, чтобы КП f был аффинно изоморфен тривиальному КП. В частности, одномерный КП допускает 6-мерную алгебру Ли АС, если и только если он удовлетворяет условиям:

1) $f=A(x,t) + 2B(x,t)(dx/dt) + C(x,t)(dx/dt)^2$,

2) $\partial B/\partial x - \partial C/\partial t = 0$, $\partial A/\partial x - \partial B/\partial t - (AC-B^2) = 0$.

ТЕОРЕМА 3. *Максимальная размерность алгебры Ли проективных симметрий (ПС)* (n-1)-*мерного КП* (M_{n-1}, f) *равна* $r=n^2 + 2n$.

ТЕОРЕМА 4. КП (M_{n-1}, f) тогда и только тогда допускает алгебу Ли ПС максимальной размерности $r=n^2 + 2n$, когда (M_{n-1}, f) проективно изоморфен тривиальному КП. В частности, одномерный КП допускает 8-мерную алгебру Ли ПС в том и только в том случае, когда выполнены условия[1]:

1) $f = A(x,t)\lambda^3 + B(x,t)\lambda^2 + C(x,t)\lambda + D(x,t)$, $\lambda = dx/dt$,

2) $-3D''_{xx} + 2C''_{xt} + 3BD'_x - 2CC'_x + 3DB'_x + CB'_t - 6DA'_t - B''_{tt} - 3AD'_t = 0$,

$$-C''_{xx} + 2B''_{xt} + 6AD'_x - BC'_x + 3DA'_x - 3CA'_x - 3CA'_t - 3AC'_t + 2BB'_t$$

$$-3A''_{tt} = 0$$

ТЕОРЕМА 5. Если КП (M_{n-1}, f) допускает алгебру Ли АС размерности $r > n^2$, то f аффинно изоморфен тривиальному КП.

ТЕОРЕМА 6. Если КП (M_{n-1}, f) допускает алгебру Ли АС размерности $r > n^2 - n + 1$, то стандартная связность КП f аффинно изоморфна аффинной связности.

ТЕОРЕМА 7. Если связность КП (M_{n-1}, f) не является аффинно изоморфной аффинной связности, то размерность r максимальной алгебры Ли АС потока f удовлетворяет неравенству $r= n^2 - n + 1$.

ТЕОРЕМА 8. Если КП (M_{n-1}, f) допускает алгебру Ли АС размерности $r > n^2$, то f является полиномиальным КП 2-ой степени. Если КП (M_{n-1}, f) не является полиномиальным потоком 2-ой степени, то максимальная размерность алгебры Ли его АС равна n^2.

ТЕОРЕМА 9. Если КП (M_{n-1}, f) допускает алгебру Ли ПС размерности $r > n^2 -2n+ 6$, то f является полиномиальным КП 3-ей степени проективно эквивалентным тривиальному КП.

ТЕОРЕМА 10. Если КП (M_{n-1}, f) не является проективно эквивалентным тривиальному, то максимальная размерность его плгебры Ли ПС (АС) равна $r = n^2 -2n+ 6$ (соответственно $r = n^2 -2n+ 5$).

Теоремы 3 и 4 известны (см., например, [4] и [10]); однако, у нас они получены в качестве приложения метода пульверизационного моделирования КП. Теоремы 1,2 и 5 -10 являются новыми.

ЗАМЕЧАНИЕ. Работа поддержана РФФИ (проект № 96-01-00215).

Библиографический список

1 Игошин В.А. Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков // Докл. АН СССР. 1991. Т.320. № 3. С.531-535.

---

[1] См. [8] и [9], где эти условия получены другим способом (отличным от пульверизационного моделирования).

2. Игошин В.А. Пульверизационное моделирование. 1 // Известия вузов. Матем. 1992. № 6. С.63-71.

3. Шапиро Я.Л. О квазигеодезическом отображении // Известия вузов. Матем. 1980. № 9. С. 53-55.

4. Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig: Teubner, 1893. V.3. 830 s.

5. Егоров И.П. Движения в обобщенных дифференциально-геометрических пространствах // Итоги науки. Апгебра. Топология. Геометрия. 1965. ВИНИТИ. М., 1967. С.375-428.

6. Егоров А.И. Лакунарные общие пространства путей / Пензенский пед. ин-т. Пенза,1982. 56 с. Деп. в ВИНИТИ, № 4044-82.

7. Егоров А.И. Проективные движения в общих пространствах путей / Пензенский пед. ин-т. Пенза, 1982. 56 с. Деп. в ВИНИТИ, № 4542-82.

8. Tresse A. Determination des invariants punctuels de l′equation differentielle ordinaire du second ordre $y''=\omega(x,y,y')$. Leipzig,1896.

9. Cartan E. Sur les varietes a connexion projective // Bull. Soc. math/ France. 1924. V.52. P.205-241.

10. Аминова А.В. Проективные преобразования как симметрии дифференциальных уравнений / Казанский гос. ун-т. Казань, 1991. 18 с. Деп.в ВИНИТИ. № 1707-В91.

V.A.I g o s h i n

ON SYMMETRIES OF QUASIGEODESIC FLOWS

An every quasigeodesic flows (QF) $f\equiv(M,f)$ on a manifold M locally may be presented by a second order differentiale equation: $d^2x^i/dt^2=f^i(x^j,t,dx^j/dt)$,
$1 \le i, j \le n\text{-}1=\dim M$.

The series of theorems, concerning dimensions of the maximal Lie algebras of symmetries of QF, is obtained by the pulverization modelling. For example,

THEOREM 9. If the Lie algebra of projective symmetries of the QF $f\equiv(M,f)$ ($\dim M=n-1$) have dimension $r>n^2-2n+6$, then f is polinomial. QF of third order (with respect to the “speed” dx^j/dt), which is projectively equivalent to the trivial QF.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ КВАДРИК ДАРБУ НЕЛИНЕЙЧАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. С. М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)