аргумента. Конгруэнции (C_{12}^1) определяются системой уравнений Пфаффа:

$$\omega^3=0,\ \omega_i^3=b\omega^j,\ \omega_i^j=a_j\omega^i,\ \Omega^1=\frac{1}{2}b\omega^1+\omega^2,$$

$$\Omega^2=\omega^1+\frac{1}{2}b\omega^2,\ \Omega^4=c_2^5\omega^1+c_2^4\omega^2,\ \Omega^5=c_i^5\omega^i, \qquad (7)$$

$$db=-b(b+2)(\omega^1+\omega^2),\ c_2^5=-\frac{b}{4}-\frac{3}{2}+\frac{a_1a_2}{b}$$

с произволом четырех функций одного аргумента.

Анализируя (7), убеждаемся в том, что конгруэнции (C_{12}^1) с невырождающимися квадриками Q_1 и Q_2 обладают следующими свойствами: 1/векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не являются векторами асимптотического направления квадрик Q_1 и Q_2; 2/вектор $\vec{e}_3$ сопряжен с вектором $\vec{e}_1$ относительно квадрики Q_1 тогда и только тогда, когда он сопряжен с вектором $\vec{e}_2$ относительно квадрики Q_2.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции (C_{12}^1) обладают следующими свойствами: 1/фокальные поверхности (A_i) не могут вырождаться в плоскости; 2/фокальная поверхность (A_i) тогда и только тогда вырождается в линию, когда векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ сопряжены относительно квадрики Q_i (квадрика Q_i считается невырожденной).

Т е о р е м а 3. Фокальные поверхности (A_1) и (A_2) конгруэнций (C_{12}) и (C_{12}^1) тогда и только тогда вырождаются в линии, когда прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) вырождается в связку прямых с общим центром или во множество прямых, принадлежащих одной и той же плоскости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) имеет следующий вид:

$$a_2(\omega^1)^2-a_1(\omega^2)^2=0. \qquad (8)$$

Если фокальные поверхности (A_1) и (A_2) вырождаются в линии, то $a_1=a_2=0$. Уравнение торсов (8) тождественно удовлетворяется. Верно и обратное. Теорема доказана.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978; ч.1; 1980, ч.2.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

М.К. К у з ь м и н

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЕТЕЙ Σ_n^S В A_n

В аффинном пространстве A_n, используя геометрические свойства распределений, порожденных плоской сетью, выделяется класс сетей Σ_n^S $(1\leq S\leq n-1)$ Этот класс включает в себя и сети $\Sigma_n^S\ (S\geq\frac{n}{2})$, изученные автором в работе [2]. В статье указывается верхняя граница произвола существования сетей Σ_n^S $(1\leq S\leq n-1)$ в A_n. Рассматривается пример сети Σ_n^S $(S<\frac{n}{2})$, определяющейся с самым широким произволом.

1. Возьмем в аффинном пространстве A_n плоскую сеть I. С каждой точкой $x\in A_n$ свяжем аффинный репер $(x,\vec{e}_i)$ $(i,j,k=1,2,\dots,n)$, построенный на касательных к линиям данной сети в точке x, при этом пфаффовы формы ω_i^j $(i\neq j)$ становятся главными:

$$\omega_i^j=a_{ik}^j\omega^k \quad (i\neq j).$$

Разобъем семейства линий сети Σ_n на S классов, где $1\leq S\leq n-1$ $(n=qS+\tau,\ q=[\frac{n}{S}],\ \tau<S)$. Два семейства ω^i,ω^j принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $i\equiv j\ (\mathrm{mod}\ S)$. Нумеруем классы $t,t'=1,2,\dots,S$. Для удобства рассуждений введем в каждом классе свою нумерацию семейств линий, причем такую, чтобы при возрастании старых номеров возрастали и новые номера $u_t,v_t=1_t,2_t,\dots,q'_t(t)$ ($q'(t)$ -число семейств в классе с номером t, $q'(t)$ может принимать только значения, равные $q+1,q$), и если $\omega^{u_t}=\omega^i$, $\omega^{u_{t'}}=\omega^j$, $i<j$, то $t<t'$. Отсюда $q'(t)=q+1$ для $t=1,2,\dots,\tau$ и $q'(t)=q$ для $t=\tau+1,\dots,S$.

Распределение Δ_m назовем Δ_p -параллельным $(\pi_m(x)\subset\pi_p(x))$, если плоскости $\pi_m(x+dx)$, $\pi_p(x)$

параллельны. Пусть $\Delta_m=\Delta(\vec e_1,\dots,\vec e_m)$ и $\Delta_p=\Delta(\vec e_1,\dots,\vec e_m,\vec e_{m+1},\dots,\vec e_p)$. Тогда Δ_m будет Δ_p -параллельным, если

$$\omega_a^{\alpha'}=0 \quad (a=1,2,\dots,m;\ \alpha'=p+1,\dots,n). \qquad (2)$$

Потребуем, чтобы порождаемые сетью Σ_n распределения $\Delta_1=\Delta(\vec e_{u_t})$ были $\Delta(\vec e_{(u-1)_t},\vec e_{u_t},\vec e_{(u+1)_t})$ -параллельными (если $u_t=1_t$, то $\Delta(\vec e_{1_t},\vec e_{2_t})$-параллельными, если $u_t=q'_t(t)$ то $\Delta(\vec e_{(q'(t)-1)_t},\vec e_{q'_t(t)})$ -параллельными). Сеть, удовлетворяющую указанным требованиям, будем обозначать: Σ_n^S $(1\le S\le n-1)$.

Заметим, что каждое из распределений $\Delta_{q'(t)}=\Delta(\vec e_{1_t},\dots,\vec e_{q'_t(t)})$ является параллельным [2] (плоскости $\Pi_{q'(t)}(x)$ принадлежат одной связке $q'(t)$ -плоскостей). Отсюда при $s\ge\frac{n}{2}$ имеем параллельные распределения $\Delta_2(\vec e_{1_t},\vec e_{2_t}),\Delta_1(\vec e_{1_{t'}})$, где $t=1,2,\dots,n-s$; $t'=n-s+1,\dots,s$. Таким образом, выделенный здесь класс сетей Σ_n^S $(1\le s\le n-1)$ включает в себя и сети Σ_n^s $(s\ge\frac{n}{2})$, рассмотренные в работе [2].

2. Перейдем к доказательству теоремы существования сетей Σ_n^S $(1\le s\le n-1)$ в аффинном пространстве A_n. Для этого следует исследовать систему уравнений (1) с учетом равенств вида (2).

Так как распределения $\Delta_{q'(t)}$ являются параллельными, то имеем

$$\omega_{u_t}^{v_{t'}}=0 \quad (t\ne t'). \qquad (3)$$

Внешние дифференциалы форм (3) тождественно равны нулю. Отсюда видно, что система уравнений (1) разбивается на S подсистем, и, следовательно, характеры S_i исследуемой системы можно выразить через характеры $(S_i)_t$ подсистемы по формуле

$$S_i=\sum_{t=1}^{S}(S_i)_t. \qquad (4)$$

Аналогичным образом можно выразить число Картана Q и число произвольных параметров N через соответствующие числа Q_t и N_t, для подсистем:

$$Q=\sum_{t=1}^{S} Q_t,\quad N=\sum_{t=1}^{S} N_t \qquad (4')$$

Рассмотрим теперь формы $\omega_{u_t}^{v_t}$ $(u_t\ne v_t)$. В силу условий (2) имеем равенства:

$$\omega_{u_t}^{\hat u_t}=0\ (\hat u\ne u\pm1,\ \hat u=1,2,\dots,q'(t)\ge3), \qquad (5)$$

а оставшиеся формы разобъем на две части:

$$\omega_{1_t}^{2_t},\ \omega_{2_t}^{3_t},\ \dots,\ \omega_{(q'(t)-1)_t}^{q'_t(t)}; \qquad (6_1)$$

$$\omega_{2_t}^{1_t},\ \omega_{3_t}^{2_t},\ \dots,\ \omega_{q'_t(t)}^{(q'(t)-1)_t}, \qquad (6_2)$$

в каждой из которых число форм равно $q'(t)-1$.

Выделяются следующие случаи:

1/ $q'(t)=1$, 2/ $q'(t)=2$, 3/ $q'(t)\ge3$

В первом случае форм вида (6) не будет, следовательно, характеры исследуемых подсистем $(S_i)_t$ будут равны нулю. Во втором случае будут формы $\omega_{1_t}^{2_t}$, $\omega_{2_t}^{1_t}$, следовательно, надо исследовать систему уравнений

$$\omega_{1_t}^{2_t}=a_{1_tk}^{2_t}\omega^k,\quad \omega_{2_t}^{1_t}=a_{2_tk}^{1_t}\omega^k,$$

система ковариантов которой имеет вид

$$\Delta a_{1_tk}^{2_t}\wedge\omega^k=0,\quad \Delta a_{2_tk}^{1_t}\wedge\omega^k=0,$$

откуда получим $(S_i)_t=2$.

В третьем случае, т.е. когда $q'(t)\ge3$, следует обратить внимание на внешние дифференциалы форм вида (см. (5)):

$$\omega_u^{u\pm2}=0 \qquad (7)$$

(индексы, указывающие номер класса, опущены).

Заметим, что из форм (7) достаточно рассматривать формы, у которых значения верхнего индекса больше (меньше) значений нижнего индекса. Возьмем форму $\omega_u^{u+2}=0$, тогда $D\omega_u^{u+2}=\omega_u^{u+1}\wedge\omega_{u+1}^{u+2}$. Следуя теореме Фробениуса, мы должны положить $\omega_u^{u+1}\wedge\omega_{u+1}^{u+2}=0$, следовательно, существует $\alpha_u,\beta_u\in R$ такие, что $\alpha_u^2+\beta_u^2\ne0$ и $\alpha_u\omega_u^{u+1}+\beta_u\omega_{u+1}^{u+2}=0$. Число таких соотношений равно числу форм вида ω_u^{u+2}, то есть равно $q'(t)-2$. Следовательно, система линейно независимых форм из (6_1) состоит не более чем из одной формы; аналогичный вывод справедлив и для форм (6_2). Таким образом, старший характер $(S_n)_t\le2$. Учитывая все рассмотренные случаи, имеем предложение.

П р е д л о ж е н и е 1. Произвол существования сетей Σ_n^s $(1\le S\le n-1)$ в аффинном пространстве A_n не превышает $2S$ функций n аргументов.

П р е д л о ж е н и е 2. При $s \geqslant \frac{n}{2}$ произвол существования сетей Σ_n^s в A_n равен $2(n-s)$ функций n аргументов.

В самом деле, при $s > \frac{n}{2}$ $q'(t) = q+1$ для $t = 1,2,\ldots,n-s$, следовательно, $(S_n)_t = 2$ и $q'(t') = q = 1$ для $t' = n-s+1,\ldots,s$, отсюда $(S_n)_{t'} = 0$. По формулам (4) имеем

$$S_n = \sum_{t=1}^{n-s}(S_n)_t + \sum_{t'=n-s+1}^{s}(S_n)_{t'} = 2(n-s).$$

При $s = \frac{n}{2}$ $(s = n-s)$ $q'(t) = q = 2$ для $t = 1,2,\ldots,s$, откуда $(S_n)_t = 2$ и $S_n = 2\cdot s = 2(n-s)$.

З а м е ч а н и е. Нетрудно проверить, что во всех рассмотренных выше случаях критерий Картана [3] выполнен, т.е. число Картана $Q = s_1 + 2s_2 + \ldots + ns_n$ равно числу произвольных параметров N (см. формулы (4)).

Из предложений 1 и 2 имеем теорему.

Т е о р е м а. Произвол существования сетей Σ_n^s $(1 \leq s \leq n-1)$ в аффинном пространстве A_n не превышает $2\cdot(\min\{n-s, s\})$ функций n аргументов.

3. В заключение укажем пример сети Σ_n^s $(s < \frac{n}{2})$ в A_n, определяющейся с максимальным произволом, т.е. $S_n = 2s$. Геометрически такую сеть можно выделить, потребовав, чтобы среди $q'(t)$ $(t = 1,2,\ldots,s)$ 1-распределений $\Delta(\vec{e}_{u_t})$ $q'(t) - 2$ были параллельными, а оставшиеся распределения были либо оба Δ_2-параллельными, либо одно из них – только Δ_3-параллельным, а другое распределение – параллельным.

Список литературы

1. Базылев В.Т., Кузьмин М.К., Столяров А.В. Сети на многообразиях. – Проблемы геометрии. Т.12. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. М., 1981, с.97-125.

2. Кузьмин М.К. Сети Σ_n^s $(s \geqslant \frac{n}{2})$. – Прикладные вопросы дифференциальной геометрии. Вып.1. М., с.52-56. (Рукопись депонирована в ВИНИТИ АН СССР 7 апр. 1982г., №1648-82 Деп.).

3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л., 1948.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

Н.Н. Л о к о т к о в

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ ОТОБРАЖЕНИИ $T: T_x \to N_x$

На p-мерной поверхности V_p в евклидовом пространстве E_n выделяются распределения Δ_τ $(1 \leq \tau < p)$, вдоль которых параллельно в нормальной связности единичное нормальное векторное поле, и $\Delta_{p-\tau}$-распределение, ортогональное к распределению Δ_τ. В работе рассмотрено отображение $T: T_x \to N_x$ касательного пространства T_x в нормальное пространство N_x такое, что $T(\vec{e}) = \vec{0}$, если $\vec{e} \in \Delta_\tau(x)$, и $T(\vec{e}) \neq \vec{0}$, если $\vec{e} \in \Delta_{p-\tau}$.

1. Присоединим к поверхности V_p подвижной репер $R = \{x, \vec{e}_{\jmath}, \vec{e}_\alpha\}$, где $x \in V_p$, векторы $\vec{e}_{\jmath}$ $(\jmath, j, k, \ldots = \overline{1,p})$ лежат в касательном пространстве T_x к поверхности V_p в точке x, векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma,\ldots = \overline{p+1,n})$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения N_x к пространству T_x.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dx = \omega^{\jmath}\vec{e}_{\jmath};\; d\vec{e}_{\jmath} = \omega_{\jmath}^{j}\vec{e}_j + \omega_{\jmath}^{\alpha}e_\alpha;\; d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^{\jmath}\vec{e}_{\jmath} + \omega_\alpha^{\beta}\vec{e}_\beta. \quad (1)$$

Все дифференциальные формы ω удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства. Поверхность V_p в репере R определяется системой дифференциальных уравнений $\omega^\alpha = 0$. Продолжая систему, получим

$$\omega_{\jmath}^{\alpha} = b_{\jmath j}^{\alpha}\omega^{j},\quad b_{\jmath j}^{\alpha} = b_{j\jmath}^{\alpha}. \quad (2)$$

Величины $b_{\jmath j}^{\alpha}$ образуют второй фундаментальный тензор поверхности V_p. Легко проверить, что

$$db_{\jmath j}^{\alpha} = b_{\jmath k}^{\alpha}\omega_j^{k} + b_{jk}^{\alpha}\omega_{\jmath}^{k} - b_{\jmath j}^{\beta}\omega_\beta^{\alpha} + b_{\jmath jk}^{\alpha}\omega^{k} \quad (3)$$