(A_3) в точке A_3 определяется точкой A_3 и векторами $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Фокусами прямолинейной конгруэнции $\{A,\bar{e}_1\}$ являются точки

$$\bar{F}_1=\bar{A}, \quad \bar{F}_2=\bar{A}+\bar{e}_1.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
1975 вып.6

В.С.М а л а х о в с к и й

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПРИЗНАКАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В работе, носящей методический характер, дано приложение метода внешних форм и подвижного репера к установлению характеристических признаков некоторых известных классов поверхностей.

§I. Цилиндрические поверхности R.

О п р е д е л е н и е I. Поверхностью R называется поверхность в трехмерном евклидовом пространстве E_3, все нормали которой пересекают прямую $\ell\in E_3$. Прямая ℓ называется осью поверхности R.

Поверхность R называется цилиндрической поверхностью R, если её касательная плоскость в каждой точке параллельна оси ℓ.

Т е о р е м а I.I. Цилиндрические поверхности R являются прямыми круговыми цилиндрами с осью ℓ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем поверхность R к каноническому ортонормированному реперу $\{A,\bar{e}_i\}$, $(i,j,k=1,2,3)$, где A –текущая точка поверхности, орт $\bar{e}_1$ параллелен оси ℓ, а орт $\bar{e}_3$ направлен по нормали n к поверхности в точке A. Обозначим буквой N точку пересечения нормали n с осью ℓ и буквой a –ненулевую координату точки N относительно репера $\{A, \bar{e}_i\}$:

$$\bar{N} = \bar{A} + a\bar{e}_3, \qquad a \neq 0. \tag{1.1}$$

При перемещении точки A по поверхности орт $\bar{e}_1$ не изменяется, а точка N перемещается по оси ℓ. Имеем

$$\omega^3 = 0, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega^2 = a\omega_2^3, \quad da = 0, \tag{1.2}$$

где ω^i, ω_i^k –компоненты деривационных формул

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \qquad d\bar{e}_i = \omega_i^k \bar{e}_k \tag{1.3}$$

репера $\{A, \bar{e}_i\}$, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \qquad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \tag{1.4}$$

и соотношениям

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{1.5}$$

Система (1.2) вполне интегрируема и определяет цилиндрические поверхности R с произволом пяти постоянных.

Назовем координатные линии $\omega^2 = 0$ и $\omega^1 = 0$ соответственно линиями F_1 и F_2. Из определения цилиндрической поверхности R следует, что линии F_1 – прямые, параллельные оси ℓ.

Рассмотрим линии F_2.

Обозначим

$$ds = \omega^2 \Big|_{\omega^1 = 0}. \tag{1.6}$$

Так как вдоль линии F_2

$$|d\bar{A}| = |ds|, \tag{1.7}$$

то параметр s – длина дуги линии F_2, отсчитываемой от её некоторой фиксированной точки A_0.

Перемещение репера $\{A, \bar{e}_i\}$ вдоль линий F_2 характеризуется следующими деривационными формулами:

$$\frac{d\bar{A}}{ds} = \bar{e}_2, \quad \frac{d\bar{e}_1}{ds} = 0, \quad \frac{d\bar{e}_2}{ds} = \frac{1}{a}\bar{e}_3, \quad \frac{d\bar{e}_3}{ds} = -\frac{1}{a}\bar{e}_2. \tag{1.8}$$

Сравнивая формулы (1.8) с деривационными формулами репера Френе линии F_2

$$\frac{d\bar{A}}{ds} = \bar{t}, \quad \frac{d\bar{t}}{ds} = \rho\bar{n}, \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -\rho\bar{t} + \tau\bar{b}, \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = -\tau\bar{n}, \tag{1.9}$$

где $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ – орты касательной, главной нормали и бинормали линии F_2, ρ – кривизна, а τ – кручение линии F_2 в точке A, убеждаемся, что

$$\bar{t} = \bar{e}_2, \quad \bar{n} = \bar{e}_3, \quad \bar{b} = \bar{e}_1, \tag{1.10}$$

$$\rho = \frac{1}{a} = \mathrm{const}, \quad \tau = 0. \tag{1.11}$$

Следовательно, линии F_2 – окружности радиуса a с центрами на оси ℓ и плоскостями, перпендикулярными оси ℓ. Значит, цилиндрические поверхности R являются прямыми круговыми цилиндрами. Теорема доказана.

Произвол решения системы дифференциальных уравнений (1.2) интерпретируется следующим образом: четыре константы определяют положение оси ℓ прямого кругового цилиндра в пространстве E_3, а пятая константа – радиус цилиндра.

§2. Теорема существования нецилиндрических поверхностей R

Т е о р е м а 2.1. Нецилиндрические поверхности R существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента и шести произвольных постоянных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим буквами N и T точки пересечения с осью ℓ соответственно нормали и касательной плоскости нецилиндрической поверхности R в точке A. Отнесем поверхность к каноническому реперу ортонормированному $\{A,\bar e_i\}$, где орт $\bar e_1$ направлен по прямой AT, а орт $\bar e_3$ – по нормали AN. Пусть a и b ненулевые координаты соответственно точек N и T относительно репера $\{A,\bar e_i\}$:

$$\bar N=\bar A+a\bar e_3,\qquad \bar T=\bar A+b\bar e_1, \tag{2.1}$$

$$a\neq 0,\qquad b\neq 0. \tag{2.2}$$

Направление оси ℓ нецилиндрической поверхности R определяется вектором

$$\overline{TN}=a\bar e_3-b\bar e_1. \tag{2.3}$$

Имеем

$$\begin{gathered}\omega^3=0,\\ \omega_1^3=\lambda_{11}\omega^1+\lambda_{12}\omega^2,\\ \omega_2^3=\lambda_{12}\omega^1+\lambda_{22}\omega^2,\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}d\bar N=\{(1-a\lambda_{11})\omega^1-a\lambda_{12}\omega^2\}\bar e_1+\{(1-a\lambda_{22})\omega^2-a\lambda_{12}\omega^1\}\bar e_2+da\,\bar e_3,\\ dT=(\omega^1+db)\bar e_1+(\omega^2+b\omega_1^2)\bar e_2+b(\lambda_{11}\omega^1+\lambda_{12}\omega^2)\bar e_3.\end{gathered} \tag{2.5}$$

При перемещении точки A по поверхности R точки N и T перемещаются по оси ℓ, следовательно, векторы $d\bar N$ и $d\bar T$ должны быть коллинеарны вектору (2.3). Обозначим

$$\rho_1=\lambda_{11},\qquad \rho_2=\frac{1}{a},\qquad K=\rho_1\cdot\rho_2. \tag{2.6}$$

Замкнутая система дифференциальных уравнений нецилиндрической поверхности R приводится к виду

$$\omega^3=0,\quad \omega_1^3=\rho_1\omega^1,\quad \omega_2^3=\rho_2\omega^2,\quad b\omega_1^2+\omega^2=0, \tag{2.7}$$

$$b\,d\rho_2=(\rho_2-\rho_1)\omega^1,\quad db=-(1+b^2K)\omega^1, \tag{2.8}$$

$$d\rho_1\wedge\omega^1=0. \tag{2.9}$$

Имеем $s_0=6$, $s_1=1$, $s_2=0$, $Q=N=1$. Система – в инволюции и определяет нецилиндрические поверхности R с произволом одной функции одного аргумента и шести произвольных постоянных. Теорема доказана.

§3. Геометрические свойства поверхностей R

В дальнейшем мы будем рассматривать нецилиндрические поверхности R, опуская слово "нецилиндрический" в формулировках теорем.

Т е о р е м а 3.1. Координатная сеть линий $\omega^1\omega^2=0$ на поверхности R есть сеть линий кривизны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сравнивая уравнения (2.7) с уравнениями Пфаффа поверхности, отнесенной к её реперу Френе (орты $\bar e_1$, $\bar e_2$ такого репера направлены по касательным к линиям кривизны поверхности), убеждаемся, что координатные линии $\omega^2=0$ (линии F_1) и $\omega^1=0$ (линии F_2) являются линиями кривизны поверхности R, а инварианты

ρ_1, ρ_2 и K – её главными кривизнами и полной кривизной.

Т е о р е м а 3.2. Поверхность R с постоянной главной кривизной ρ_2 (нормальной кривизной направления, ортогонального касательной AT к линии F_1) является сферой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (2.8) следует, что при $d\rho_2=0$ главные кривизны ρ_1 и ρ_2 совпадают.

Рассмотрим линии кривизны F_1 и F_2 поверхности R. Обозначим

$$ds_\alpha = \omega^\alpha \Big|_{\omega^\beta=0}, \quad (\alpha,\beta=1,2;\ \alpha\neq\beta). \tag{3.1}$$

Пусть $\bar{t}_\alpha, \bar{n}_\alpha, \bar{b}_\alpha$ – орты касательной, главной нормали и бинормали линии F_α, $\rho^{(\alpha)}$ – её кривизны, $\tau^{(\alpha)}$ – кручение в точке A $(\alpha=1,2)$. Используя уравнения (2.7), находим, что перемещения репера $\{A, \bar{e}_i\}$ вдоль линий F_1 и F_2 характеризуются соответственно деривационными формулами

$$\frac{d\bar{A}}{ds_1}=\bar{e}_1, \quad \frac{d\bar{e}_1}{ds_1}=\rho_1\bar{e}_3, \quad \frac{d\bar{e}_2}{ds_1}=0, \quad \frac{d\bar{e}_3}{ds_1}=-\rho_1\bar{e}_1, \tag{3.2}$$

$$\frac{d\bar{A}}{ds_2}=\bar{e}_2, \quad \frac{d\bar{e}_1}{ds_2}=-\frac{1}{b}\bar{e}_2, \quad \frac{d\bar{e}_2}{ds_2}=\frac{1}{b}\bar{e}_1+\rho_2\bar{e}_3, \quad \frac{d\bar{e}_3}{ds_2}=-\rho_2\bar{e}_2, \tag{3.3}$$

причем из (2.8) следует:

$$\frac{d\rho_2}{ds_1}=\frac{1}{b}(\rho_2-\rho_1), \quad \frac{db}{ds_1}=-(1+b^2K), \tag{3.4}$$

$$\frac{d\rho_2}{ds_2}=0, \quad \frac{db}{ds_2}=0. \tag{3.5}$$

Деривационные формулы репера Френе кривой F_α $(\alpha=1,2)$ имеют вид

$$\frac{d\bar{A}}{ds_\alpha}=\bar{t}_\alpha, \quad \frac{d\bar{t}_\alpha}{ds_\alpha}=\rho^{(\alpha)}\bar{n}_\alpha, \quad \frac{d\bar{n}_\alpha}{ds_\alpha}=-\rho^{(\alpha)}\bar{t}_\alpha+\tau^{(\alpha)}\bar{b}_\alpha, \quad \frac{d\bar{b}_\alpha}{ds_\alpha}=-\tau^{(\alpha)}\bar{n}_\alpha \tag{3.6}$$

(по α не суммировать!). Сравнивая формулы (3.6) с формулами (3.2), (3.3), находим

$$\rho^{(1)}=\rho_1, \quad \tau^{(1)}=0, \tag{3.7}$$

$$b\,\rho^{(2)}=\sqrt{1+(b\rho_2)^2}, \quad \tau^{(2)}=0, \tag{3.8}$$

$$\bar{t}_1=\bar{e}_1, \quad \bar{n}_1=\bar{e}_3, \quad \bar{b}_1=-\bar{e}_2, \tag{3.9}$$

$$\bar{t}_2=\bar{e}_2, \quad \bar{n}_2=\frac{1}{\rho^{(2)}}(\bar{e}_1+b\rho_2\bar{e}_3), \quad \bar{b}_2=\frac{1}{\rho^{(2)}}(b\rho_2\bar{e}_1-\bar{e}_3). \tag{3.10}$$

Т е о р е м а 3.3. Поверхность R является поверхностью вращения, образованной вращением плоской линии F_1 вокруг оси ℓ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (3.7), (3.8), (2.3) следует, что линии F_α – плоские, причем плоскость линии F_1 содержит ось ℓ поверхности R. Используя (3.8), (3.5), находим

$$\frac{d\rho^{(2)}}{ds^{(2)}}=0. \tag{3.11}$$

Следовательно, линия F_2 – окружность радиуса $\rho^{(2)}$ с центром в точке

$$\bar{C}=\bar{A}+(\bar{e}_1+b\rho_2\bar{e}_3)\frac{1}{\rho^{(2)}}, \tag{3.12}$$

плоскость которой ортогональна вектору

$$b\rho_2\bar{e}_1-\bar{e}_3=\rho^{(2)}\bar{b}_2. \tag{3.13}$$

Точки

$$\bar{N}=\bar{A}+\frac{1}{\rho_2}\bar{e}_3, \quad \bar{T}=\bar{A}+b\bar{e}_1, \quad \bar{C}=\bar{A}+(\bar{e}_1+b\rho_2\bar{e}_3)\frac{1}{\rho^{(2)}} \tag{3.14}$$

принадлежат одной прямой, значит центр C окружности F_2 лежит на оси ℓ поверхности R. Из коллинеарности векторов (2.3) и (3.13) следует, что плоскость окружности F_2 ортогональна оси ℓ. Таким образом, поверхность R с осью ℓ образована вращением плоской линии F_1 вокруг прямой ℓ. Линии F_1 являются меридианами поверхности R, линии F_2 - параллелями.

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема позволяет охарактеризовать произвол существования поверхностей R (см. теорему 2.1). Четыре константы определяют положение оси ℓ в пространстве, пятая - положение плоскости α, проходящей через ось ℓ, одна функция одного аргумента задает кривую F_1 в плоскости α, наконец, шестая константа характеризует сдвиг пространства E_3 вдоль оси ℓ.

Т е о р е м а 3.4. Поверхность $S \subset E_3$ тогда и только тогда является поверхностью вращения, когда все её нормали пересекают фиксированную прямую $\ell \in E_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/Пусть S - поверхность вращения с осью ℓ. Из дифференциальной геометрии известно [1, с. 43], что все нормали её пересекают прямую ℓ. Следовательно, всякая поверхность вращения является поверхностью R.

2/Пусть все нормали поверхности S пересекают фиксированную прямую $\ell \in E_3$, т.е. пусть S - поверхность R (цилиндрическая или нецилиндрическая) с осью ℓ. Из теорем 1.1 и 3.3 непосредственно следует, что S - поверхность вращения. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Свойство поверхности быть поверхностью R является характеристическим признаком поверхности вращения.

Рассмотрим случай

$$b = Const. \tag{3.15}$$

Так как

$$\overline{AT} = b\bar{e}_1, \tag{3.16}$$

то линия F_1 при условии (3.15) является трактрисой с осью ℓ ([2], стр. 101), а поверхность R - псевдосферой ([2], стр. 102). Из формул (2.8), (3.15) непосредственно получаем известную формулу полной кривизны псевдосферы:

$$K = -\frac{1}{b^2}.$$

§4. Прямой геликоид

Т е о р е м а 4.1. (Каталана). Единственная минимальная линейчатая поверхность (отличная от плоскости) - прямой геликоид (линейчатая поверхность, горловая линия которой - прямая линия).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем линейчатую поверхность S к каноническому ортонормированному реперу $\{A, \bar{e}_i\}$, где орт $\bar{e}_1$ направлен по прямолинейной образующей, а орт $\bar{e}_3$ - по нормали к поверхности. Имеем:

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_1^3 = \lambda_{12}^3 \omega^2, \quad \omega_2^3 = \lambda_{12}^3 \omega^1 + \lambda_{22}^3 \omega^2, \quad \omega_1^2 = h_2 \omega^2 \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &d\lambda^3_{12}\wedge\omega^2+2h_2\lambda^3_{12}\,\omega^1\wedge\omega^2=0,\\ &d\lambda^3_{12}\wedge\omega^1+d\lambda^3_{22}\wedge\omega^2+h_2\lambda^3_{22}\,\omega^1\wedge\omega^2=0,\\ &dh_2\wedge\omega^2+\{(h_2)^2-(\lambda^3_{12})^2\}\,\omega^1\wedge\omega^2=0.\end{aligned}\right\}\quad(4.2)$$

Так как поверхность S —минимальная,то

$$H=\tfrac{1}{2}(\lambda^3_{11}+\lambda^3_{22})=\tfrac{1}{2}\lambda^3_{22}=0,\quad \lambda^3_{12}\neq 0. \quad (4.3)$$

Уравнения (4.2) приводятся к виду:

$$d\lambda^3_{12}\wedge\omega^2+2h_2\lambda^3_{12}\,\omega^1\wedge\omega^2=0,\quad d\lambda^3_{12}\wedge\omega^1=0, \quad (4.4)$$

$$dh_2\wedge\omega^2+\{(h_2)^2-(\lambda^3_{12})^2\}\,\omega^1\wedge\omega^2=0. \quad (4.5)$$

Система (4.I.),(4.2),(4.5) не в инволюции.Осуществляя частичное продолжение,из (4.4) находим:

$$d\lambda^3_{12}=-2h_2\lambda^3_{12}\,\omega^1. \quad (4.6)$$

Замыкая (4.6),получим:

$$dh_2\wedge\omega^1=0 \quad (4.7)$$

Продолженная система тоже не в инволюции.Из (4.5),(4.7) находим:

$$dh_2=\{(\lambda^3_{12})^2-(h_2)^2\}\,\omega^1.$$

Система

$$\omega^3=0,\quad \omega^3_1=\lambda^3_{12}\omega^2,\quad \omega^3_2=\lambda^3_{12}\omega^1,\quad \omega^2_1=h_2\omega^2, \quad (4.8)$$

$$d\lambda^3_{12}=-2h_2\lambda^3_{12}\omega^1,\quad dh_2=\{(\lambda^3_{12})^2-(h_2)^2\}\,\omega^1.$$

вполне интегрируема и определяет минимальные линейчатые поверхности с произволом шести постоянных.

Рассмотрим горловую линию (M) минимальной линейчатой поверхности.Имеем:

$$\bar{M}=\bar{A}-\frac{h_2}{(h_2)^2+(\lambda^3_{12})^2}\,\bar{e}_1 \quad (4.9)$$

Обозначим:

$$\bar{m}=\lambda^3_{12}\bar{e}_2-h_2\bar{e}_3 \quad (4.10)$$

Так как

$$d\bar{M}=\frac{\lambda^3_{12}}{(\lambda^3_{12})^2+(h_2)^2}\,\bar{m}, \quad (4.11)$$

$$d\bar{m}=-h_2\bar{m},$$

то горловая линия (4.9) является прямой линией,которую пересекают ортогонально все прямолинейные образующие поверхности S .Следовательно,поверхность S -прямой геликоид.Теорема доказана.

Список литературы

I.Фиников С.П.Теория поверхностей.ОНТИ ГТТИ,М.-Л,I934.

2.Каган В.Ф.Основы теории поверхностей.ч.2,М-Л,ГИТТЛ, ОГИЗ,I948г.

3.Погорелов А.В.Дифференциальная геометрия,I972г.