УДК 514.76

***М. В. Глебова*[1], *А. Я. Султанов*[2]**
[1, 2] *Пензенский государственный университет, Россия*
[1] mvmorgun@mail.ru, [2] sultanovaya@rambler.ru
[1] ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1051-4358
[2] ORCID: http://orcid.org/0009-0005-1244-4279
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-5

О размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений более двух пространств аффинной связности первого типа

Теория движений в обобщенных пространствах является одним из направлений в современной дифференциальной геометрии. Вопросами движений в различных пространствах аффинных связностей занимались такие ученые, как Э. Картан, П. К. Рашевский, П. А. Широков, И. П. Егоров, А. Я. Султанов. Движения в прямых произведениях двух пространств аффинной связности рассматривались в работе М. В. Моргун.

В случае прямого произведения более двух пространств аффинной связности вопрос о размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований данного пространства оставался открытым.

В данной статье получена оценка верхней границы размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств аффинной связности, представляющих собой прямое произведение не менее трех непроективно-евклидовых пространств определенного вида.

Для решения этой задачи получена система линейных однородных уравнений, которой удовлетворяют компоненты произвольного инфинитезимального аффинного преобразования. Эта система найдена с ис-

Поступила в редакцию 28.04.2024 г.

пользованием свойств производной Ли, примененной к тензорному полю кривизны рассматриваемых пространств. Оценка ранга данной системы позволяет получить оценку снизу ранга матрицы рассматриваемой системы.

Ключевые слова: прямое произведение пространств аффинной связности, инфинитезимальные аффинные преобразования, алгебра Ли, размерность алгебры Ли

1. Основные понятия и сведения

Пусть (M_n, ∇) — пространство аффинной связности без кручения.

Векторное поле X на многообразии M_n, снабженном аффинной связностью ∇, называется инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства (M_n, ∇), если

$$L_X \nabla = 0,$$

где L_X — символ производной Ли [2].

Известно, что множество всех инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (M_n, ∇) образует алгебру Ли над полем R относительно операции коммутирования векторных полей [5]. Обозначим эту алгебру через $g(M_n)$, причем $\dim g(M_n) = n^2 + n$ (см.: [1]).

В локальных координатах уравнение $L_X \nabla = 0$ равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Первую серию условий интегрируемости этой системы составляют уравнения

$$L_X R = 0,$$

где R — тензорное поле кривизны связности ∇.

В локальных координатах это уравнение представляет собой систему линейных однородных уравнений от координат поля X и частных производных от этих координат

$$X^M \partial_M R^D_{ABC} + R\left({}_{ABC}^{D}\big|_{M}^{F}\right) X^M_F = 0, \qquad (1)$$

где

$$R(\,{}_{ABC}^{\;\;D}|_{M}^{F}) = \delta_A^F R_{MBC}^D + \delta_B^F R_{AMC}^D + \delta_C^F R_{ABM}^D - \delta_M^D R_{ABC}^F.$$

Если ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных X_F^M системы (1), не менее r, то справедливо неравенство (см.: [1])

$$\dim g(M_n) \leq n^2 + n - r.$$

2. Прямое произведение пространств аффинной связности специального типа

Пусть $\left({}^aM_{n_a},\ {}^a\nabla\right)$ $(a = 1,2, \dots, s)$ — непроективно-евклидовы пространства аффинной связности без кручения.

Как известно [1], пространство аффинной связности $\left({}^aM_{n_a},\ {}^a\nabla\right)$ является непроективно-евклидовым тогда и только тогда, когда тензорное поле Вейля отлично от нулевого. Это условие локально эквивалентно выполнению одного из следующих условий:

(1) существует такая карта гладкого атласа $({}^aU, x^{i^a})$, что имеется хотя бы одна составляющая тензорного поля кривизны вида ${}^aR^{i_1^a}_{i_2^a i_2^a i_3^a}$ $(i_1^a, i_2^a, i_3^a = \overline{1, n_a})$, отличная от нуля для попарно различных между собою индексов;

(2) в каждой карте $({}^aV, y^{i^a})$ все составляющие тензора кривизны вида ${}^aR^{i_1^a}_{i_2^a i_2^a i_3^a}$ равны нулю, но существует карта гладкого атласа $({}^aU, x^{i^a})$ такая, что существует хотя бы одна составляющая тензорного поля кривизны вида ${}^aR^{i_1^a}_{i_2^a i_3^a i_4^a}$ $(i_1^a, i_2^a, i_3^a, i_4^a = \overline{1, n_a})$, отличная от нуля для попарно различных индексов [1].

В данной статье ограничимся рассмотрением пространств аффинной связности, удовлетворяющих условию (1). Такие пространства будем называть *пространствами первого типа*.

Стандартным образом строим прямое произведение этих пространств аффинной связности (см.: [3]):

$$(M_n, \nabla)=\left({}^1M_{n_1}, \ {}^1\nabla\right) \times \ldots \times \left({}^sM_{n_s}, \ {}^s\nabla\right).$$

3. Оценка сверху размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений более двух пространств аффинной связности первого типа

Для построенного пространства имеет место следующая теорема.

Теорема. *Размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения s* $(s \geq 3)$ *пространств аффинной связности*, *составляющие* ${}^1R^{i_1^1}_{i_2^1 i_2^1 i_3^1}$, ${}^2R^{i_1^2}_{i_2^2 i_2^2 i_3^2}$, …, ${}^sR^{i_1^s}_{i_2^s i_2^s i_3^s}$ *тензоров кривизны которых отличны от нуля, не превосходит*

$$(n_1 + \cdots + n_s)^2 - (3s - 1)(n_1 + \cdots + n_s) + 2s^2 + 3s.$$

Доказательство. При $s = 1$ размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности $\left({}^1M_{n_1}, \ {}^1\nabla\right)$, удовлетворяющего условию (1), не превосходит $n_1^2 - 2n_1 + 5$. Это утверждение доказано И. П. Егоровым [1].

При $s = 2$ размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности $\left({}^1M_{n_1}, \ {}^1\nabla\right) \times \left({}^2M_{n_2}, \ {}^2\nabla\right)$, удовлетворяющего условию (1), не превосходит числа

$$(n_1 + n_2)^2 - 5(n_1 + n_2) + 14.$$

Это утверждение доказано М. В. Моргун (см.: [4]).

Рассмотрим случай, когда пространство аффинной связности представляет собой прямое произведение не менее трех непроективно-евклидовых пространств, каждое из которых удовлетворяет условию (1).

Пусть ($s \geq 3$).

Не нарушая общности рассуждений, полагаем $i_1^a = 1$, $i_2^a = 2, i_3^a = 3$.

Тогда в карте $({}^1U \times \ldots \times {}^sU, x^A)$ $(A = \overline{1, n_1 + \cdots + n_s})$ пространства (M_n, ∇)=$\left({}^1M_{n_1}, {}^1\nabla\right) \times \ldots \times \left({}^sM_{n_s}, {}^s\nabla\right)$ имеем отличные от нуля составляющие вида

R_{223}^1,

$R_{n_1+2\ n_1+2\ n_1+3}^{n_1+1}, \ldots,$

$R_{n_1+\cdots+n_{s-1}+2\ n_1+\cdots+n_{s-1}+2\ n_1+\cdots+n_{s-1}+3}^{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}.$

Рассмотрим укороченную матрицу системы (1), элементами которой являются коэффициенты при неизвестных

$$X_1^B\ (B > 1),\ X_D^2\ (D \geq 3),\ X_C^3\ (C \geq 4),\ X_1^1,$$

$$X_{n_1+1}^E\ (E \neq 2, 3, n_1 + 1), X_F^{n_1+2}\ (F \neq 1, n_1 + 1, n_1 + 2),$$

$$X_K^{n_1+3}\ (K \neq 1, n_1 + 1, n_1 + 2, n_1 + 3), X_{n_1+1}^{n_1+1}, \ldots,$$

$$X_{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}^A (A \neq 2, 3, n_1 + 2, n_1 + 3, \ldots, n_1 + \cdots + n_{s-2} + 2,$$

$$n_1 + \cdots + n_{s-2+} 3, n_1 + \cdots + n_{s-2} + 1),$$

$$X_G^{n_1+\cdots+n_{s-1}+2}\ (G \neq 1, n_1 + 1, \ldots, n_1 + \cdots + n_{s-1} + 1, n_1 + \cdots +$$

$$+n_{s-1} + 2),$$

$$X_H^{n_1+\cdots+n_{s-1}+3}\ (H \neq 1, n_1 + 1, \ldots, n_1 + \cdots + n_{s-1} + 1, n_1 + \cdots +$$

$$+n_{s-1} + 2,\ n_1 + \cdots + n_{s-1} + 3),$$

$$X_{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}^{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}$$

в уравнениях, где индексы R имеют следующий вид:

$$\binom{M}{223}\ (M > 1), \binom{1}{P23}\ (P \geq 3), \binom{1}{22N}\ (N \geq 4),\ \binom{1}{223},$$

$$\binom{S}{n_1+2\ n_1+2\ n_1+3}\ \ (S \neq 2{,}3, n_1 + 1),$$

$$\binom{n_1+1}{Z\ n_1+2\ n_1+3}\ \ (Z \neq 1, n_1 + 1, n_1 + 2),$$

$$\binom{n_1+1}{n_1+2\ \ n_1+2\ T}\ \ (T \neq 1, n_1+1, n_1+2, n_1+3),$$

$$\binom{n_1+1}{n_1+2\ \ n_1+2\ \ n_1+3}$$

$$, \ldots,$$

$$\binom{V}{n_1+\cdots+n_{s-1}+2\ \ \ n_1+\cdots+n_{s-1}+2\ \ \ n_1+\cdots+n_{s-1}+3}$$

$$(V \neq 2, 3, n_1+2, n_1+3, \ldots, n_1+\cdots+n_{s-2}+2, n_1+\cdots+$$
$$+n_{s-2}+3,\ n_1+\cdots+n_{s-2}+1),$$

$$\binom{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}{Z\ \ n_1+\cdots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\cdots+n_{s-1}+3}$$

$$(Z \neq 1, n_1+1, n_1+2, \ldots, n_1+\cdots+n_{s-1}+1, n_1+\cdots+n_{s-1}+2),$$

$$\binom{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}{n_1+\cdots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\cdots+n_{s-1}+2\ \ T}$$

$$(T \neq 1, n_1+1, n_1+2, n_1+3, \ldots, n_1+\cdots+n_{s-1}+2, n_1+\cdots+$$
$$+n_{s-1}+3),$$

$$\binom{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}{n_1+\cdots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\cdots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\cdots+n_{s-1}+3}.$$

Найдем ранг полученной матрицы:

$$r = 3(n_1+\cdots+n_s)s - (1+3+\cdots+2(s-1)+1) -$$
$$-\big(2+3+\cdots+(s+1)\big) - (3+4+\cdots+s+2) + s =$$
$$= 3s(n_1+\cdots+n_s) - 2s^2 - 3s.$$

Отсюда следует, что

$$\dim g(M_n) \leq (n_1+\cdots+n_s)^2 - (3s-1)(n_1+\cdots+n_s) + 2s^2 + 3s.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Учен. зап. Пензенск. пед. ин-та. Казань, 1965.

2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

3. *Моргун М.В.* Инфинитезимальные аффинные преобразования прямого произведения пространств аффинной связности : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Казань, 2009.

4. *Моргун М.В.* Аффинные преобразования прямого произведения непроективно-евклидовых пространств аффинной связности // Изв. вузов. Математика. 2009. №4. С. 72—77.

5. *Султанов А.Я.* Алгебры Ли дифференцирований линейных алгебр над полем // ДГМФ. 2021. Вып. 52. С. 123—136.

Для цитирования: *Глебова М.В., Султанов А.Я.* О размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений более двух пространств аффинной связности первого типа // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 70—77. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-5.

MSC 2010: 17B66

M. V. Glebova[1], *A. Ya. Sultanov*[2]
Penza State University,
37 Lermontova St., Penza, 440026, Russia
[1] mvmorgun@mail.ru, [2] sultanovaya@rambler.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-5

On the dimension of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of direct products of more than two spaces of affine connection of the first type

Submitted on April 28, 2024

The theory of motions in generalized spaces is one of the directions in modern differential geometry. Such scientists as E. Cartan, P.K. Rashevsky, P.A. Shirokov, I.P. Egorov, A.Ya. Sultanov and other scientists were engaged in the study of movements in various spaces of affine connections. The question of movements in direct products of two spaces of affine connection was considered in M.V. Morgun's work.

In the case of a direct product of more than two spaces of affine connection, the question of the dimension of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of a given space remained open.

In this article, an estimate of the upper bound of the dimension of the Lie algebra of infinitesimal affine transformations of affine connection spaces, representing a direct reproduction of at least three non-projective Euclidean spaces of a certain type, is obtained.

To solve this problem, a system of linear homogeneous equations is obtained, which is satisfied by the components of an arbitrary infinitesimal affine transformation. This system is found using the properties of the Lie derivative applied to the tensor field of curvature of the spaces under consideration. The evaluation of the rank of this system allows us to obtain an estimate from below of the rank of the matrix of the system under consideration.

Keywords: direct product of affine connectivity spaces, infinitesimal affine transformations, Lie algebra, dimension of Lie algebra

References

1. *Egorov, I.P.:* Motions in spaces with affine connections. Penza State Ped. Institute Scientific Notes. Kazan (1965).

2. *Kobayashi, Sh., Nomizu, K.:* Fundamentals of differential geometry. Moscow (1981).

3. *Morgun, M.:* Infinitesimal affine transformations of the direct product of affine connectivity spaces: PhD Thesis. Kazan (2009).

4. *Morgun, M.V.:* Affine transformations of the direct product of non-projective Euclidean spaces of affine connectivity. Izvestia Vuzov. Math., 4, 72—77 (2009).

5. *Sultanov, A.Ya., Glevova, M.V., Bolotnikova, O.V.:* Lie algebras of differentiations of linear algebras over a field. DGMF. 52, 123—136 (2021).

For citation: Glebova, M.V., Sultanov, A.Ya. On the dimension of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of direct products of more than two spaces of affine connection of the first type. DGMF, 55 (2), 70—77 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-5.