12. *Gardner R.B.* Invariants of pfaffian systems // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 126. № 3. P. 514-533.

13. *Stscherbakov R.N.* Grundlagen der Methoden der äußeren Differentialformen und der geradlinigen Differentialgeometrie. Tomsk, 1973.

В. В. Кайзер

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ГРАССМАНОВОМ МНОГОБРАЗИИ (I)

Многие понятия дифференциальной геометрии прямолинейных конгруэнций и комплексов могут быть распространены на случай неинтегрируемых гладких распределений на грассмановом многообразии всех прямых проективного пространства. Исследуются специальные двумерные и трехмерные распределения, называемые неголономными конгруэнциями и неголономными комплексами. В 1-й части статьи сформулированы результаты.

УДК-514.76

О ПРОДОЛЖЕНИИ ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ

В.В. Корниевский

(Томский политехнический университет)

Дифференциально-геометрические исследования, проводимые контравариантными методами, широко используют неголономные реперы. Большая же часть исследований в рамках ковариантной методики использует только голономные реперы, т.е. изучает структуры в расслоениях, присоединенных к главным расслоенным пространствам голономных кореперов. В данной работе предлагается принцип неголономного продолжения гладкого многообразия и вычисления структурных форм расслоений неголономных кореперов.

1. Пусть M - n-мерное гладкое многообразие. Это значит [2, с. 12], что M есть хаусдорфово пространство с фиксированным полным атласом (V_α, h_α), т.е. $V_\alpha \subset M$ покрывают M, а h_α: $V_\alpha \to h_\alpha(V_\alpha) \subset R_n$ - координатные гомеоморфизмы. Ввиду гладкости M, h_α являются диффеоморфизмами. На хаусдорфовом многообразии [3, с.263] не существует диффеенцирований кроме определяемых векторными полями в виде действия линейных дифференциальных операторов этих полей. Если $\overline{X}$ - векторное поле, φ_t - его локальная однопараметрическая группа

локальных преобразований, а f - скалярная функция, то производной функции f по полю $\overline{X}$ является функция

$$\overline{X}f = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\varphi_t \circ f - f).$$

В R_n, являющимся хаусдорфовым пространством, для векторных полей $\overline{e_i}$ канонического базиса базисные дифференцирования определяются формулами $\overline{e_i}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Если $\{\overline{a_i}\}$ другой репер в R_n, то

$$\overline{a_i} = a_i^j(x)\overline{e_j},\ \det\left\| a_i^j \right\| \neq 0\ ,\ \overline{a_i}f = a_i^j \overline{e_j}f = a_i^j \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Пусть $\{\overline{X_i}\}$ - гладкое поле репера на M. Дифференцирование относительно поля голономного репера назовем голономным, относительно неголономного поля репера неголономным дифференцированием. Последнее в литературе известно как пфаффово дифференцирование. Дифференцирование относительно поля натурального репера $\{\overline{\partial_i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\}$, векторы которого при изоморфизме T_x X и R_n соответствуют векторам канонического базиса в R_n, является, как известно, обычным частным дифференцированием.

2. Рассмотрим множество координатных гомеоморфизмов областей, центрированных в точке x ∈ M, на окрестности нулевой точки R_n. Диффеоморфизмы h_α и h_β называются P-эквивалентными, если [3, с.241] $h_\alpha^{-1}(0) = h_\beta^{-1}(0) = x$ и в $V_\alpha \cap V_\beta$ существуют окрестность и гладкое поле репера $\{\overline{X_i}\}$ на этой окрестности, такие, что координатные функции $y^i = h_\alpha^i(y)$ и $z^i = h_\beta^i(z)$ имеют в точке *x* равными все производные до порядка p=1,2,.... Эти условия инвариантны относительно замены поля реперов и действительно [3] определяют отношение эквивалентности. Классы эквивалентности по данному отношению называются p-корeперами. Каждый корепер в точке x определяется по данному полю репера $\{\overline{X_i}\}$ вещественными значениями $x_{i_1}^j,\ x_{i_2 i_1}^j, \ldots, x_{i_p i_{p-1} \ldots i_1}^j$ в точке *x* производных

$$\overline{X}_{i_1} y^j, \overline{X}_{i_2}(\overline{X}_{i_1} y^j) = \overline{X}_{i_2}\overline{X}_{i_1} y^j, \ldots, \overline{X}_{i_p}(\overline{X}_{i_{p-1}} \ldots \overline{X}_{i_1} y^j) = \overline{X}_{i_p}\overline{X}_{i_{p-1}} \ldots \overline{X}_{i_1} y^j,$$

При этом, так как h_α - диффеоморфизм, $\det\left\| x_{i_1}^j \right\| \neq 0$. Если репер $\{\overline{X_i}\}$ голономный, то получаем голономные кореперы, если репер $\{\overline{X_i}\}$ неголономный, то возникают неголономные кореперы. Компоненты голономных кореперов симметричны по нижним индексам, тогда как компоненты неголономных кореперов, вообще говоря, такой симметрией не обладают.

3. Пусть произвольная точка $x \in V_\alpha$ такая, что $h^i_\alpha(x) = x^i_\alpha$ не равны нулю одновременно. Рассмотрим композиции $\varphi_\alpha(x) = tr(x) \circ h_\alpha(x)$, где $tr(x)$ - отображение трансляции пространства R_n, переводящее точку x в нулевую точку. Получено множество диффеоморфизмов φ_α областей V'_α, содержащих x, на окрестности нулевой точки R_n. Невырожденная матрица Якоби $\left\| \frac{\partial \varphi^i_\alpha}{\partial x^j} \right\|$ является матрицей дифференциала $\varphi_{\alpha *}$. Поскольку дифференциал не зависит от выбора карт [2, с.207], содержащих x и $\varphi_\alpha(x)$, будем говорить о дифференциале φ_*. Пусть $a_i(t)$ - локальные однопараметрические группы локальных преобразований векторных полей натурального репера. Они порождают группы $\varphi(a_i(t))$. Векторные поля $\overline{X}_i = \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} \overline{\partial}_j$ порождаются однопараметрическими группами преобразований $\varphi(a_i(t))_* = \varphi(a_i(t)) \circ a_i(t) \circ \varphi(a_i(-t))$. Эти векторные поля линейно независимы в некоторой окрестности точки x и, следовательно, определяют поле репера $\{\overline{X_i}\}$. Коммутатор полей $\overline{X_i}$ и $\overline{X_j}$ вычисляется по формуле

$$\left[\overline{X}_i, \overline{X}_j\right] = \left[\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}\overline{\partial}_k, \frac{\partial \varphi^e}{\partial x^i}\overline{\partial}_e\right] = \left(\frac{\partial \varphi^e}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial^2 \varphi^t}{\partial x^e \partial x^i} - \frac{\partial \varphi^e}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial^2 \varphi^t}{\partial x^e \partial x^j}\right)\overset{*}{\varphi}{}^k_t\,\overline{X}_k.$$

Здесь $\overset{*}{\varphi}{}^k_t$ - элементы обратной матрицы к матрице преобразования φ_*. Величины в правой части представляют собой, вообще говоря, отличные от нуля кососимметричные по нижним индексам функции точки многообразия, т.е. $\{\overline{X_i}\}$ - поле неголономного репера. Дифференцирование относительно репера $\{\overline{X_i}\}$ определяется формулой

$$\overline{X}_i f = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\varphi(a_i(t))_* f - f),$$

т.е. [2, с. 280] является дифференцированием Ли.

Теперь, в соответствии с пунктом 2, можно вычислить компоненты корепера любого порядка. Для примера вычислим компоненты 2-корепера. Имеем

$$\left(\overline{X}_{i_1}\varphi^j\right)_x = \left[\left(\frac{\partial \varphi^e}{\partial x^{i_1}}\overline{\partial}_e\right)\varphi^j\right]_x = \left(\frac{\partial \varphi^e}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^e}\right)_x,$$

$$\left(\overline{X}_{i_2}\overline{X}_{i_1}\varphi^j\right)_x = \left[\left(\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^{i_2}}\overline{\partial}_k\right)\left(\frac{\partial \varphi^e}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^e}\right)\right]_x =$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^{i_2}}\cdot\frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial x^k \partial x^{i_1}}\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^e} + \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^{i_2}}\frac{\partial \varphi^e}{\partial x^{i_1}}\cdot\frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^k \partial x^e}\right)_x.$$

Полученные компоненты $x^j_{i_2 i_1}$ не симметричны по нижним индексам, т.е. 2-корепер неголономный.

4. Таким образом, в некоторой окрестности V точки $x \in$ M найдено поле неголономного репера $\{\overline{X}_i\}$, компоненты объекта неголономности которого имеют вид

$$b^k_{ij} = \left(\frac{\partial \varphi^e}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi^s}{\partial x^e \partial x^j} - \frac{\partial \varphi^e}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi^s}{\partial x^e \partial x^i} \right) \overset{*}{\varphi}{}^k_s .$$

Для сопряженного реперу $\{\overline{X}_i\}$ корепера $\{\varpi^i\}$ выполняются [4, с.66] соотношения

$$D\varpi^i = \frac{1}{2} b^i_{jk} \varpi^j \wedge \varpi^k ,$$

справедливые в окрестности V $\subset$ M. Структурные уравнения расслоения ${}^*\overline{H}^p(M)$ неголономных p-кореперов, как частный случай главного расслоенного пространства, известны [3]. Будем искать формы расслоения ${}^*\overline{H}^p(M)$ путем нахождения зависимости между ними и соответствующими формами расслоения ${}^*H^p(M)$ голономных кореперов. Строение последних хорошо известно [4, с. 49]. Пусть Θ - структурные формы ${}^*H^p(M)$, а ω- структурные формы ${}^*\overline{H}^p(M)$. Через Θ (δ) и ω(δ) обозначим значения этих форм при фиксации точки *x*. Из того, что $\varpi^j_i(\delta) = \Theta^j_i(\delta)$ и являются формами алгебры Ли группы *GL*(*U*,*R*) преобразований в T_x M, вытекает, что в V имеет место $\varpi^j_i = \Theta^j_i + C^j_{ik} \varpi^k$, где C^j_{ik} - некоторые функции точки многообразия. Найдем формы ϖ^j_i ,, исходя из деривационных формул $D\overline{X}_j = \varpi^i_j \overline{X}_i$ репера $\{\overline{X}_i\}$, как линейного репера в касательном расслоении TM. Так как $\overline{X}_i : M \to TM$, то $d\overline{X}_i \subset T(TM)$. Как известно, TM = (M, $\overline{U}$,GL(U,R)). Следовательно π^{-1} (V $\subset$ M) = V × GL(U,R). Пусть, для определенности, π^{-1} (*x*) = *e* - единичный элемент GL(U,R). Тогда

$$d\overline{X}_i\Big|_x \subset T_{(x,e)}(TM).= T_x M + T_e\, GL(U,R).$$

Ввиду изоморфизма алгебры Ли группы GL(U,R) и $T_e\, GL(U,R)$, составляющая из $T_e\, GL(U,R)$ имеет координаты $\Theta^j_i(\delta)$. Тогда на V $\subset$ M имеем

$$d\overline{X}_i = (\partial^{\varpi}_j \overline{X}_i)\, \varpi^j + \Theta^j_i \overline{X}_j .$$

Пфаффова производная ∂^{ϖ}_j для рассматриваемого репера является производной Ли. Таким образом,

$$\partial^{\varpi}_j \overline{X}_i = \left[\overline{X}_j , \overline{X}_i \right] = b^k_{ij} \overline{X}_k .$$

и, следовательно, деривационные формулы имеют вид

$$d\overline{X_i} = (\Theta_i^j + b_{ik}^j \varpi^k)\,\overline{X}_k.$$

Итак, $\varpi_i^j = \Theta_i^j + b_{ik}^j \varpi^k$. Непосредственным дифференцированием находим

$$D\varpi_i^j = \varpi_i^k \wedge \varpi_k^j + \Delta b_{ik}^j \wedge \varpi^k + \varpi^k \wedge \Theta_{ik}^j.$$

Здесь формы Δb_{ik}^j имеют вид ковариантного дифференциала b_{jk}^i по формам ϖ_i^k. Так как { b_{jk}^i } - GL(U,R) - тензор, получаем

$$D\varpi_i^j = \varpi_i^k \wedge \varpi_k^j + \varpi^k \wedge \varpi_{ik}^j.$$

Здесь несимметричные по нижним индексам формы $\varpi_{ik}^j = \Theta_{ik}^j + b_{ike}^j \varpi^e$ есть структурные формы ${}^*\overline{H}^p(M)$, а b_{ike}^j выражаются через объект неголономности и его первое продолжение. Формы ϖ_{jke}^i находятся дифференцированием ϖ_{ik}^j и т.д. Продолжение процесса приводит к соотношениям

$$\varpi \to \varpi_{j1\ldots jp}^i = \Theta_{j1\ldots jp}^i + b_{j1\ldots jpk}^i \varpi^k,$$

где $b_{j1\ldots jpk}^i$ охватывается дифференциальным продолжением порядка p объекта неголономности репера.

Библиографический список

1. *Корниевский В.В.* О структурных формах расслоения полуголономных кореперов. Сибирская геометрическая конференция: Тез. докл. Томск: Томск. пед-ин-т, 1995. С. 31-34.
2. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987. 344 с.
3. *Лумисте Ю.Г.* Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения p-кореперов // Тр.геом.семинара. М.: ВИНИТИ, 1974. Т.5. С. 239-257.
4. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ, 1979. Т.9. С. 5-246.

V.V.K o r n i e v s k i y

ABOUT CONTINUATION OF SMOOTH MANIFOLD

In article a principle unholonomic of continuation of smooth manifold and calculation of the structural forms of boundle unholonomic coreper is stated.