2. С.П.Фиников, Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М-Л, 1948.

3. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многооб-зий. Труды Московского математического общества, т.2, 275-3…, ГИТТЛ, М., 1953.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

вып 2 1971

П О Х И Л А М.М.

ПАРЫ МНОГООБРАЗИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ (Общий случай)

В n-мерном проективном пространстве рассматривается пара $V_{h,n}$ ногообразий $(h,h,n)^2$ квадратичных элементов [2] с несовпадающими иперплоскостями соответствующих локальных квадратичных элемен-ов. Найден основной фундаментальный объект пары $V_{h,n}$. Построен анонический репер пары конгруэнций коник в P_3 (пары $V_{2,3}$). сследуется частный класс расслояемых пар B [3] конгруэнций в P_3 (пары B^o).

§ I. Основной внутренний объект пары многообразий $V_{h,n}$.

Пусть (Φ_1), (Φ_2) - пара многообразий $(h,h,n)^2$ квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 n-мерного проективного пространства P_n.

Определение I.I. Парой $V_{h,n}$ многообразий (Φ_1), (Φ_2) будем называть такую пару многообразий $(h,h,n)^2$ [2], у кото-рой гиперплоскости τ_1, τ_2 соответствующих локальных квадратич-ных элементов Φ_1, Φ_2 не совпадают.

Пусть гиперплоскости τ_1, τ_2 пересекаются по $(n-2)$-плоскости
Обозначим через A_0, A_n полюсы $(n-2)$-плоскости ρ относите
но квадрики Φ_1, Φ_2 в $(n-1)$-мерном проективном пространстве
, . Пару $V_{h,n}$ отнесем к частично канонизированному репе
$\{\bar A_0, \bar A_1, \dots, \bar A_n\}$, у которого $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ — произвольные нез
висимые точки плоскости ρ; A_0, A_n — полюсы плоскости ρ от
сительно квадрик Φ_1, Φ_2.

Уравнения квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 запишутся в виде

$$(x^0)^2 + a_{ij}x^ix^j = 0, \quad x^n = 0, \qquad (1.$$

$$(x^n)^2 + A_{ij}x^ix^j = 0, \quad x^0 = 0, \qquad (1.$$

где индексы в дальнейшем принимают значения:

$$i,j,k,l = 1,2,\dots,n-1;\ \alpha,\beta,\gamma = 1,2,\dots,n;\ a,b,c = 1,\dots,h; \qquad (1.$$

$$\lambda,\eta,\nu = h+1,\dots,n;\ 1 \le h \le n;\ \det(a_{ij}) \ne 0,\ \det(A_{ij}) \ne 0.$$

Обозначая $\omega^0_\alpha = \omega_\alpha$ и принимая формы ω_a за базисные, приведем дифференциальные уравнения пары $V_{h,n}$ к виду:

$$\omega_\lambda = a^a_\lambda \omega_a,\ \omega^\alpha_0 = \Gamma^{\alpha a}_0 \omega_a,\ \omega^i_n = \Gamma^{ia}_n \omega_a,\ \omega^n_i = \Gamma^{na}_i \omega_a, \qquad (1$$

$$\nabla a_{ij} + 2a_{ij}\omega^0_0 = b^a_{ij}\omega_a,\ \nabla A_{ij} + 2A_{ij}\omega^n_n = B^a_{ij}\omega_a,$$

где $b^a_{ij} = b^a_{ji}$, $B^a_{ij} = B^a_{ji}$.

Система величин $\Gamma = \{a^a_\lambda, \Gamma^{\alpha a}_0, \Gamma^{ia}_n, \Gamma^{na}_i, b^a_{ij}, B^a_{ij}, a_{ij}, A_{ij}\}$
образует внутренний фундаментальный объект [Г] пары $V_{h,n}$. Зам
уравнения (I,4), получаем:

$$\Delta a^a_\lambda \wedge \omega_a = 0,\ \Delta\Gamma^{\alpha a}_0 \wedge \omega_a = 0,\ \Delta\Gamma^{ia}_n \wedge \omega_a = 0, \qquad (1$$

$$\Delta\Gamma^{na}_i \wedge \omega_a = 0,\ \Delta b^a_{ij} \wedge \omega_a = 0,\ \Delta B^a_{ij} \wedge \omega_a = 0,$$

где

$$\Delta a^a_\lambda = da^a_\lambda - a^a_\eta\omega^\eta_\lambda + a^b_\lambda\omega^a_b + a^b_\lambda a^a_\eta\omega^\eta_b - \omega^a_\lambda,$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha a}_0 = d\Gamma^{\alpha a}_0 + \Gamma^{\alpha b}_0\omega^a_b + \Gamma^{\beta a}_0\omega^\alpha_\beta - 2\Gamma^{\alpha a}_0\omega^0_0 + a^a_\eta\Gamma^{\alpha b}_0\omega^\eta_b,$$

$$\Delta\Gamma^{ia}_n = d\Gamma^{ia}_n + \Gamma^{ib}_n\omega^a_b + \Gamma^{ja}_n\omega^i_j - \Gamma^{ia}_0\omega_n - \Gamma^{ia}_n(\omega^n_n + \omega^0_0) + a^a_\lambda\Gamma^{ib}_n\omega^\lambda_b,$$

$$\Delta\Gamma^{na}_i = d\Gamma^{na}_i + \Gamma^{nb}_i\omega^a_b - \Gamma^{na}_j\omega^j_i + \Gamma^{na}_i(\omega^n_n - \omega^0_0) - \Gamma^{na}_0\omega_i + a^a_\lambda\Gamma^{nb}_i\omega^\lambda_b,$$

$$\Delta b^a_{ij} = db^a_{ij} + b^b_{ij}\omega^a_b - b^a_{kj}\omega^k_i - b^a_{ik}\omega^k_j + b^a_{ij}\omega^0_0 + a^a_\lambda b^b_{ij}\omega^\lambda_b -$$

$$2a_{ij}(\omega^a_0 + a^a_\eta\omega^\eta_0) + (a_{kj}\omega_i + a_{ik}\omega_j)\Gamma^{ka}_0 + (a_{kj}\omega^n_i + a_{ik}\omega^n_j)\Gamma^{ka}_n,$$

$$\Delta B^a_{ij} = dB^a_{ij} + B^b_{ij}\omega^a_b - B^a_{kj}\omega^k_i - B^a_{ik}\omega^k_j + B^a_{ij}(2\omega^n_n - \omega^0_0) +$$

$$+ a^a_\lambda B^b_{ij}\omega^\lambda_b - 2A_{ij}(\Gamma^{na}_0\omega_n + \Gamma^{na}_l\omega^l_n) +$$

$$+ (A_{kj}\omega_i + A_{ik}\omega_j)\Gamma^{ka}_0 + (A_{kj}\omega^n_i + A_{ik}\omega^n_j)\Gamma^{ka}_n. \qquad (1.6)$$

Разрешая уравнения (I.5) по лемме Картана, получаем:

$$\Delta a^a_\lambda = a^{ab}_\lambda\omega_b,\ \Delta\Gamma^{\alpha a}_0 = \Gamma^{\alpha ab}_0\omega_b,\ \Delta\Gamma^{ia}_n = \Gamma^{iab}_n\omega_b,$$

$$\Delta\Gamma^{na}_i = \Gamma^{nab}_i\omega_b,\ \Delta b^a_{ij} = b^{ab}_{ij}\omega_b,\ \Delta B^a_{ij} = B^{ab}_{ij}\omega_b. \qquad (1.7)$$

стема величин $\Gamma_1 = \{\Gamma, a^{ab}_\lambda, \Gamma^{\alpha ab}_0, \Gamma^{iab}_n, \Gamma^{nab}_i, b^{ab}_{ij}, B^{ab}_{ij}\}$
разует продолженный внутренний фундаментальный объект пары $V_{h,n}$.

Теорема I.I. Пара $V_{h,n}$ существует и определяется с
оизволом $S_{h,n} = n^2 + 3n - h - 2$ функций h аргументов.

Доказательство. Система (I.5) содержит $S_{h,n}$ не
висимых квадратичных уравнений и $h \cdot S_{h,n}$ независимых характе
стических форм. Производя высечение цепи по формам базиса ω_a
(м. [4] стр. 330), из уравнений (I.5) заключаем, что $\tau_1 = h \cdot S_{h,n}$;
$_1 = S_2 = \dots = S_{h-1} = S_{h,n}$ и, следовательно, $S_h = \tau_1 - (S_1 + \dots + S_{h-1}) = S_{h,n}$.
к как $N = Q = S_{h,n} \cdot C^2_{h+1}$, то система (I.4) в инволюции и опреде
ет пару $V_{h,n}$ с произволом $S_{h,n} = n^2 + 3n - h - 2$ функций h арг
нтов. Теорема доказана.

Т е о р е м а I.2. Внутренний фундаментальный объект $\Gamma=\{a^a_\lambda, \Gamma^{\alpha a}_o, \Gamma^{ia}_n, \Gamma^{na}_i, b^a_{ij}, B^a_{ij}, a_{ij}, A_{ij}\}$ является основным объект [I] пары $V_{h,n}$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 4 (см. стр.32). В случае пары $V_{2,3}$ конгруэнций $(C_1),(C_2)$ коник C_1, в трехмерном проективном пространстве P_3 легко строится ка нический репер R_o. Помещаем вершину A_i в одну из точек сечения коники $C_j\ (j\neq i;\ i,j=1,2)$ с прямой ℓ пересечен плоскостей коник, считая, что коники C_i не касаются прямо A_o, A_3 -полюсы прямой ℓ относительно коник C_1, C_2.

Уравнения коник принимают вид:

$$(x^0)^2-(a_1x^1)^2+2a_{12}x^1x^2=0,\ x^3=0,$$

$$(x^3)^2-(a_2x^2)^2+2A_{12}x^1x^2=0,\ x^0=0,$$

где $a_{12}\neq 0$, $A_{12}\neq 0$.

Так как

$$\delta a_{12}=a_{12}(\pi^1_1+\pi^2_2-2\pi^0_0),\ \delta A_{12}=A_{12}(\pi^1_1+\pi^2_2-2$$

то вершины репера можно пронормировать так, чтобы $a_{12}=A$

Тогда $\pi^0_0=\pi^3_3=0,\ \pi^1_1+\pi^2_2=0$. Уравнения коник C_1, C_2 примут в

$$(x^0)^2-(a_1x^1)^2-2x^1x^2=0,\ x^3=0,$$

$$(x^3)^2-(a_2x^2)^2-2x^1x^2=0,\ x^0=0.$$

Полученный частично канонизированный репер обозначим R_1

$$a_1a_2\neq 0.$$

Учитывая соотношение

$$\delta[(a_1)^2-(a_2)^2]=2[(a_1)^2+(a_2)^2]\pi^1_1$$

проводим оставшуюся нормировку так, чтобы

$$a_1=a_2=a.$$

построенном каноническом репере уравнения коник C_1, C_2 имеют

$$(x^0)^2-2x^1x^2-(ax^1)^2=0,\ x^3=0, \tag{1.12}$$

$$(x^3)^2-2x^1x^2-(ax^2)^2=0,\ x^0=0.$$

§ 2. Расслояемые пары B^0.

ассмотрим пары $V_{2,3}$ конгруэнций $(C_1),(C_2)$ коник C_1, C_2 в ерном проективном пространстве. Если C_1, C_2 не касаются пря- ℓ пересечения плоскостей коник C_1, C_2, то относя пару $V_{2,3}$ перу R_1 приведем уравнения коник к виду:

$$(x^0)^2-2x^1x^2-(a_1x^1)^2=0,\ x^3=0, \tag{2.1}$$

$$(x^3)^2-2x^1x^2-(a_2x^2)^2=0,\ x^0=0. \tag{2.2}$$

п р е д е л е н и е 2.I. Парой B [3] называется такая $V_{2,3}$, для которой: I) существует одностороннее расслоение аждой конгруэнции (C_i) коник C_i к линейчатому многообразию их A_oA_3; 2) точки A_o, A_3 являются характеристическими точками костей коник C_1, C_2; 3) касательные плоскости к поверхностям) содержат прямую $m\equiv A_oA_3$.

ары B определяются системой уравнений Пфаффа:

$$\omega^0_i=\Gamma^{0k}_i\omega_k,\ \omega^i_0=\Gamma^{ik}_0\omega_k,\ \omega^i_3=\Gamma^{ik}_3\omega_k,\ \omega^3_0=0,\ \omega^0_3=0,$$

$$\equiv da_1-a_1(\omega^1_1-\omega^0_0)=A^k_1\omega_k,\ \theta_2\equiv da_2-a_2(\omega^2_2-\omega^3_3)=A^k_2\omega_k,$$

$$\equiv\omega^1_1+\omega^2_2-2\omega^0_0=b^k_1\omega_k,\ \Omega_2\equiv\omega^1_1+\omega^2_2-2\omega^3_3=b^k_2\omega_k,\ \omega^j_i=0; \tag{2.3}$$

кже системой квадратичных уравнений:

$$\omega_i\wedge\omega^j_3+\omega^0_i\wedge\omega^j_0=0,\ \Omega_1\wedge\omega^1_0=0,\ \Omega_2\wedge\omega^2_3=0,$$

$$\ _1\wedge\omega^2_0+a_1\theta_1\wedge\omega^1_0=0,\ \Omega_2\wedge\omega^1_3+a_2\theta_2\wedge\omega^2_3=0, \tag{2.4}$$

$$a_1\theta_1\wedge\omega_0^2=0,\ a_2\theta_2\wedge\omega_3^1=0,\ \omega_0^k\wedge\omega_k=0,\ \omega_3^k\wedge\omega_k^0=0,$$

$$2\omega_0^1\wedge\omega_0^2+\omega_1^0\wedge\omega_0^1+\omega_1\wedge\omega_3^1-\omega_2^0\wedge\omega_0^2-\omega_2\wedge\omega_3^2=0, \quad (2$$

$$\omega_0^1\wedge\omega_0^2-\omega_3^1\wedge\omega_3^2=0,\quad a_1\omega_0^1\wedge\omega_0^2=0,\ a_2\omega_0^1\wedge\omega_0^2=0,$$

где $\omega_i^3\equiv\omega_i$, $\omega_1\wedge\omega_2\neq 0$, $\omega_1^0\wedge\omega_2^0\neq 0$, $i\neq j;\ i,k=1,2$, (2

по i,j не суммировать.

В работе [3] рассматривается случай пары B с невырожда

мися характеристическими поверхностями $(A_0),(A_3)$. Рассмотри

пары B в случае, когда характеристические поверхности (A_0)

вырождаются в точки.

Т е о р е м а 2.I. Если характеристическая поверхност

пары B вырождается в точку (линию), то и характеристическа

поверхность (A_3) вырождается в точку (линию) и наоборот.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A_3 – неподвижная точ

Тогда $\omega_3^1=\omega_3^2=0$. Из (2.4) имеем: $\omega_0^1\wedge\omega_0^2=0, \omega_i^0\wedge$

$\omega_1^0\wedge\omega_2^0\neq 0, \omega_1^0\wedge\omega_0^1-\omega_2^0\wedge\omega_0^2=0$. Отсюда $\omega_0^1=\omega_0^2=0$. Наобор

если $\omega_0^1=\omega_0^2=0$, то из (2.4) следует, что $\omega_3^1=\omega_3^2=0$

Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 2.2. Пары B, для которых хара

ристические поверхности $(A_0),(A_3)$ вырождаются в точки, называ

парами B^0.

Т е о р е м а 2.2. Пары B^0 существуют и определяютс

произволом шести функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для пары B^0 квадратичнс

нения (2.4) удовлетворены тождественно, а система Пфаффа к

вид:

$$\omega_i^0=\Gamma_i^{0k}\omega_k,\ \Omega_i=b_i^k\omega_k,\ \theta_i=A_i^k\omega_k, \tag{2.6}$$
$$\omega_0^i=0,\ \omega_3^i=0,\ \omega_i^j=0,\ \omega_0^3=0,\ \omega_3^0=0.$$

нкая (2.6), убеждаемся в её инволютивности. Произвол её ре-

ния шесть функций двух аргументов.

Т е о р е м а 2.3. Каждая из поверхностей (A_i) пары B^0 вы-

дается в плоскость.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $d\bar{A}_i=\omega_i^0\bar{A}_0+\omega_i^i\bar{A}_i+\omega_i\bar{A}_3$,

плоскость $A_0A_iA_3$ касается поверхности (A_i). Далее имеем

$\bar{A}_0\bar{A}_i\bar{A}_3)=(\omega_0^0+\omega_i^i+\omega_3^3)(\bar{A}_0\bar{A}_i\bar{A}_3)$, то есть плоскость

одвижна. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.4. Точки A_i являются фокальными точками

ики C_j. Фокальные линии на фокальных поверхностях (A_i) являют-

непересекающимися прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выписывая уравнения для опреде-

ия фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнции

) убеждаемся, что точка A_2 является фокальной для коники C_1,

равнение фокальной линии на поверхности (A_2) имеет вид $\omega_2=0$.

как $d\bar{A}_2=\omega_2^2\bar{A}_2+\omega_2^0\bar{A}_0+\omega_2\bar{A}_3$ и $d[\bar{A}_2\bar{A}_0]=(\omega_2^2+\omega_0^0)[\bar{A}_2\bar{A}_0]+\omega_2[\bar{A}_3\bar{A}_0]$,

действительно линия $\omega_2=0$ на поверхности (A_2) является

мой, проходящей через неподвижную точку A_0. Аналогично дока-

ется, что точка A_1 является фокальной точкой коники C_2 и

альная линия на поверхности (A_1) есть прямая с уравнением

$= 0$, проходящая через неподвижную точку A_3. Допуская

можность вырождения поверхностей (A_i) в линию (в определе-

3.I требование 3 заменяем уравнением $\omega_i^j=0$), имеем

дующую теорему:

Т е о р е м а 2.5. Фокальная точка A_j коники C_i пары B^0

тогда и только тогда является фокусом луча A_1A_2 прямолиней… конгруэнции (A_1A_2), когда фокальная поверхность (A_j) конгру… (C_i) вырождается.

Доказательство. Если точка $\bar{F}=\ell_1\bar{A}_1+\ell_2\bar{A}_2$ яв… ся фокусом прямой A_1A_2 конгруэнции (A_1A_2), то имеем:

$$\Gamma_1^{o2}(\ell_1)^2+(\Gamma_2^{o2}-\Gamma_1^{o1})\ell_1\ell_2-\Gamma_2^{o1}(\ell_2)^2=0.$$

Отсюда видим, что A_j тогда и только тогда является фокус… луча A_1A_2, когда $\Gamma_j^{oi}=0$. Так как $d\bar{A}_j=\omega_j^j\bar{A}_j+\omega_j\bar{A}_3+(\Gamma_j^{oj}\omega_j+\ldots$ то теорема доказана.

Пары B^o обладают ещё многими интересными геометрически… свойствами.

Литература

1. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многоо… зий. Труды Московского матем. общества, т.2, 275-383, ГИТТЛ,…
2. В.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в … мерном проективном пространстве. Геом.сб.вып.3 (Труды То… университета 168), 28-42, 1963.
3. В.С.Малаховский, Расслояемые пары конгруэнций фигур. Тру… семинара, т.3, 1971 (печатается).
4. С.П.Фиников, Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М.-Л., 194…

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

1971

ГРИЦЕНКО В.А.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ n-МЕРНОГО ВЫРОЖДЕННОГО МНОГООБРАЗИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Исследуется n-мерное многообразие квадратичных элементов [1] …-мерного проективного пространства P_n, гиперплоскости которых …разуют $(n-1)$-мерное многообразие. Построен основной фундамен…льный объект многообразия $(n-1, n, n)^2$. Выделена система тен…ров и квазитензоров многообразия $(n-1, n, n)^2$. При $n=3$ такие …огообразия были рассмотрены В.С.Малаховским [2].

§ 1. Система дифференциальных уравнений многообразия $(n-1,n,n)^2$.

Отнесем проективное пространство P_n к реперу $\{\bar{M}_{\alpha'}\}$ $(\alpha'=1,\ldots,n+1)$. …авнения инфинитезимальных смещений репера имеют вид

$$d\bar{M}_{\alpha'}=\omega_{\alpha'}^{\beta'}\bar{M}_{\beta'},$$

…е формы $\omega_{\alpha'}^{\beta'}$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\mathcal{D}\omega_{\alpha'}^{\beta'}=\omega_{\alpha'}^{\gamma'}\wedge\omega_{\gamma'}^{\beta'}.$$

…равнения квадратичного элемента пространства P_n запишутся в …де

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\quad x^{n+1}=0,\quad \det(a_{\alpha\beta})=1\quad (\alpha,\beta,\gamma\ldots=1,\ldots,n) \qquad (1.1)$$

…рмы Пфаффа

$$\omega_\alpha^{n+1}\equiv\omega_\alpha,\quad \Theta_{\alpha\beta}\equiv da_{\alpha\beta}-a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma-a_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma+\frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\omega_\gamma^\gamma$$