$$d\Omega^{\alpha}_{n}=\Omega^{\beta}_{n}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta},\quad d\omega^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma}+\frac{1}{2}\tau^{\alpha}_{\gamma\eta\beta}\Omega^{\gamma}_{n}\wedge\Omega^{\eta}_{n}, \tag{3.4}$$

где компоненты тензоров кривизны $\{R^{\alpha}_{LMJ}\}$ и $\{\tau^{\alpha}_{\gamma\eta\beta}\}$ связностей $\Gamma_{\hat{\lambda}}$ и $\Gamma_{\hat{l}}$ определяются формулами:

$$\begin{cases} R^{\hat{\beta}}_{LM\hat{\alpha}}=2\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_0}(\delta^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}\delta^{\hat{\gamma}}_{[L}\hat{\lambda}_{|\hat{\gamma}|M]}-\hat{\lambda}_{\hat{\alpha}[L}\delta^{\hat{\beta}}_{M]})+\hat{\lambda}^{0}_{[L}\delta^{n}_{M]}\delta^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}\right), \\ R^{n}_{LM\hat{\alpha}}=-\dfrac{2\hat{\lambda}_{\hat{\alpha}[L}\delta^{n}_{M]}}{\hat{\lambda}_0}, \quad R^{\hat{\alpha}}_{LMn}=2\hat{\lambda}^{0}_{[L}\delta^{\hat{\alpha}}_{M]}, \\ R^{n}_{LMn}=2\left(\delta^{\hat{\gamma}}_{[L}\hat{\lambda}_{|\hat{\gamma}|M]}+2\hat{\lambda}^{0}_{[L}\delta^{n}_{M]}\right); \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \tau^{\hat{\beta}}_{\gamma\eta\hat{\alpha}}=2\left(\frac{1}{\hat{l}_n}(\delta^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}\delta^{\varepsilon}_{[\gamma}\overset{*}{\hat{\lambda}}{}^{J}_{\eta]}l_{\varepsilon J}-\hat{l}_{\hat{\alpha}J}\overset{*}{\hat{\lambda}}{}^{J}_{[\gamma}\delta^{\hat{\beta}}_{\eta]})+\overset{*}{\hat{\lambda}}{}^{n}_{[\gamma}\delta^{0}_{\eta]}\delta^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}\right), \\ \tau^{0}_{\gamma\eta\hat{\alpha}}=\dfrac{2\hat{l}_{\hat{\alpha}J}\overset{*}{\hat{\lambda}}{}^{J}_{[\gamma}\delta^{0}_{\eta]}}{\hat{l}_n};\ \tau^{\hat{\alpha}}_{\gamma\eta 0}=2\overset{*}{\hat{\lambda}}{}^{n}_{[\gamma}\delta^{\hat{\alpha}}_{\eta]};\ \tau^{0}_{\gamma\eta 0}=2\left(\hat{l}_{\varepsilon J}\delta^{\varepsilon}_{[\gamma}\overset{*}{\hat{\lambda}}{}^{J}_{\eta]}+2\overset{*}{\hat{\lambda}}{}^{n}_{[\gamma}\delta^{0}_{\eta]}\right). \end{cases} \tag{3.6}$$

В силу (2.3) квазитензоры $\{\hat{M}_J\}$ и $\{\hat{N}_J\}$, $\{\hat{\mu}_\alpha\}$ и $\{\hat{\nu}_\alpha\}$ попарно различны и определяют в пространстве $\mathcal{P}_n$ два пучка нормализаций:

$$(\hat{N}_J+\sigma(\hat{M}_J-\hat{N}_J))\tilde{X}^J+\tilde{X}^0=0, \tag{3.7}$$

$$(\hat{\nu}_\alpha+\sigma(\hat{\mu}_\alpha-\hat{\nu}_\alpha))\tilde{X}^\alpha+\tilde{X}^n=0. \tag{3.8}$$

Обозначим через $N(\sigma)$ и $\nu(\sigma)$ – нормали (3.7) и (3.8). Сравнивая с (2.5), (2.6), убеждаемся, что

$$\hat{M}=N(1),\quad \hat{N}=N(0),\quad \hat{\mu}=\nu(1),\quad \hat{\nu}=\nu(0).$$

Геометрическая характеристика нормалей $N(\sigma)$ и $\nu(\sigma)$ дана в [5].

Относя пространство $\mathcal{P}_n$ к реперу R_σ, в котором вершины $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ расположены на пересечении гиперплоскостей (3.7) и (3.8), получим:

$$\Omega^{n}_{\alpha}=\overset{\sigma}{\nu}_{\alpha J}\Omega^{J},\quad \Omega^{0}_{J}=\overset{\sigma}{N}_{JK}\Omega^{K}. \tag{3.9}$$

Связности без кручения $(\mathcal{P}_n,\overset{\sigma}{N})$, $(\mathcal{P}_n,\overset{\sigma}{\nu})$, определяемые формами

$$\overset{N}{\Omega}{}^{J}_{K}=\Omega^{J}_{K}-\delta^{J}_{K}\Omega^{0}_{0},\quad \overset{\nu}{\Omega}{}^{\beta}_{\alpha}=\Omega^{\beta}_{\alpha}-\delta^{\beta}_{\alpha}\Omega^{n}_{n}$$

на областях $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ пространства $\mathcal{P}_n$, и связности

$$(\mathcal{P}_n,\overset{\sigma}{\Gamma}),\ (\mathcal{P}_n,\overset{\sigma}{G}),\ (\mathcal{P}_n,\overset{\circ\sigma}{G}),\ (\mathcal{P}_n,\overset{\sigma}{\gamma}),\ (\mathcal{P}_n,\overset{\circ\sigma}{\gamma}),\ (\mathcal{P}_n,\overset{\sigma}{g}),\ (\mathcal{P}_n,\overset{\circ\sigma}{g}),$$

определенные на области $\mathcal{U}\ni A_0$ формулами (1.7) – (1.10) работы [4], геометрически охарактеризованы в [4] (предложения 2.1, 2.2, 3.1, 3.2).

11*

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й Н.В. О семействах коллинеаций многомерных проективных пространств // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Вып.20. С.50-57.

2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. М., 1953. Т.2. С.275-382.

3. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М., Л.: ГИТТЛ, 1950.

4. М а л а х о в с к и й Н.В. Аффинные связности, порожденные семейством коллинеаций // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1992. Вып.23. С.53-59.

5. М а л а х о в с к и й Н.В. Нормализации проективных пространств и характеристические числа, порожденные семейством коллинеаций // Там же, 1990. Вып.21. С.50-56.

УДК 514.75

$\mathcal{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И.П о п о в, И.Е.Л и с и ц и н а

(Калининградский государственный университет)

Работа посвящена построению теории двухсоставного $H_2(\Lambda_1)$-распределения, которое названо кратко $\mathcal{H}$-распределением проективного пространства P_3. Дано задание $\mathcal{H}$-распределения в репере $\mathcal{R}_1(\mathcal{H})$ и в специализированном репере $\mathcal{R}_1(\mathcal{H})$ и доказана теорема существования: $\mathcal{H}$-распределение в проективном пространстве P_3 существует с произволом трех функций трех аргументов. Выяснен геометрический смысл голономности $\mathcal{H}$-распределения. Найдена конструкция построения поля инвариантных нормалей 2-го рода (p) оснащающего H_2-распределения – поля прямых (p) Нордена-Тимофеева. Рассматривается поле инвариантных нормалей (P) 1-го рода $\mathcal{H}$-распределения, соответствующее в проективи-

тете Бомпьяни-Пантази полю плоскостей $(\not{p})$ Нордена-Тимофеева. Доказано, что для базисного Λ_1-распределения можно построить внутренним инвариантным образом пучок оснащающих прямых в смысле Картана. Схема использования индексов такова: $\bar J, \bar{\mathcal{J}}, \bar K, \ldots = \overline{0,3}$; $J, \mathcal{J}, K, \ldots = \overline{1,3}$; $\sigma, \pi, \rho, \tau \ldots = \overline{1,2}$; $u, v, w, \ldots = \overline{2,3}$.

§ 1. Задание $\mathcal{H}$-распределения

1. Рассмотрим трехмерное проективное пространство P_3, отнесенное к подвижному реперу $\mathcal{R} = \{A_{\bar J}\}$, дифференциальные уравнения которого имеют вид:

$$dA_{\bar J} = \omega_{\bar J}^{\bar K} A_{\bar K}, \tag{I.1}$$

где

$$\mathcal{D}\omega_{\bar J}^{\bar K} = \omega_{\bar J}^{\bar L} \wedge \omega_{\bar L}^{\bar K}, \quad \sum_{\bar J} \omega_{\bar J}^{\bar J} = 0.$$

Совмещая вершину A_0 репера $\mathcal{R}$ с текущей точкой X пространства P_3, приведем структурные формы точки X к каноническому виду ω_0^J. Выбранный таким образом репер $\mathcal{R}$ назовем репером нулевого порядка $\mathcal{R}^0$.

О п р е д е л е н и е. Пару распределений

$$\Delta\Lambda_1^u \overset{def}{=} d\Lambda_1^u + \Lambda_1^v \omega_v^u - \Lambda_1^u(\omega_1^1 + \Lambda_1^v \omega_v^1) + \omega_1^u = \Lambda_{1K}^u \omega_0^K, \tag{I.2}$$

$$\Delta H_\sigma^3 \overset{def}{=} dH_\sigma^3 - H_\tau^3(\omega_\sigma^\tau + H_\sigma^3 \omega_3^\tau) + H_\sigma^3 \omega_3^3 + \omega_\sigma^3 = H_{\sigma K}^3 \omega_0^K \tag{I.3}$$

соответственно прямых Λ_1 (Λ_1-распределение) и плоскостей H_2 (H_2-распределение) проективного пространства P_3 с отношением инцидентности $X \equiv A_0 \in \Lambda_1 \subset H_2$ их соответствующих элементов в каждом центре A_0 назовем двухсоставным распределением $H_2(\Lambda_1)$ или $\mathcal{H}$-распределением проективного пространства P_3, в котором Λ_1-распределение назовем базисным распределением, а H_2-распределение – оснащающим распределением.

Прямую $\Lambda_1(A_0)$ и плоскость $H_2(A_0)$ зададим соответственно точками

$$A_0,\ L_1 = A_1 + \Lambda_1^u A_u; \quad A_0,\ T_\sigma = A_\sigma + H_\sigma^3 A_3. \tag{I.4}$$

Относительно репера $\mathcal{R}^0$ $\mathcal{H}$-распределение пространства P_3 определено уравнениями:

$$\begin{cases} d\Lambda_1^u + \Lambda_1^v \omega_v^u - \Lambda_1^u(\omega_1^1 + \Lambda_1^v \omega_v^1) + \omega_1^u = \Lambda_{1K}^u \omega_0^K, \\ dH_2^3 - H_\tau^3(\omega_2^\tau + H_2^3 \omega_3^\tau) + H_2^3 \omega_3^3 + \omega_2^3 = H_{2K}^3 \omega_0^K. \end{cases} \tag{I.5}$$

где

$$H_1^3 = \Lambda_1^3 - \Lambda_1^2 H_2^3. \tag{I.6}$$

Соотношение (I.6) характеризует условие инцидентности образующих элементов распределений (I.2), (I.3). Геометрический объект $\Gamma_1 = \{\Lambda_1^u, H_2^3, \Lambda_{1K}^u, H_{2K}^3\}$ является фундаментальным объектом I-го порядка $\mathcal{H}$-распределения, компоненты которого удовлетворяют соответственно уравнениям (I.5) и уравнениям

$$\begin{cases} d\Lambda_{11}^u - 2\Lambda_{11}^u \theta_1^1 + \Lambda_{11}^v \theta_v^u + \Lambda_{11}^u \omega_0^0 + \Lambda_{11}^u \Lambda_1^v \omega_v^1 - \Lambda_{1v}^u \omega_1^v + \Lambda_1^u \theta_1^0 = \Lambda_{11K}^u \omega_0^K, \\ \overset{(\theta)}{\nabla} \Lambda_{1v}^u + \Lambda_{1v}^u \omega_0^0 - (\Lambda_{11}^u + \Lambda_{1w}^u \Lambda_1^w)\omega_v^1 - \delta_v^u \theta_1^0 = \Lambda_{1vK}^u \omega_0^K, \\ d\Lambda_{2K}^3 - H_{2K}^3 \omega_0^0 - H_{2L}^3 \omega_K^L - H_{\tau K}^3 \vartheta_2^\tau + (H_\tau^3 \delta_K^\tau - \delta_K^3)\vartheta_2^0 + H_{2K}^3 \vartheta_3^3 = H_{2KL}^3 \omega_0^L, \end{cases} \tag{I.7}$$

где

$$H_{1K}^3 = \Lambda_{1K}^3 - \Lambda_1^2 H_{2K}^3, \quad \overset{(\theta)}{\nabla} \Lambda_{1v}^u = d\Lambda_{1v}^u - \Lambda_{1v}^u \theta_1^1 - \Lambda_{1w}^u \theta_v^w + \Lambda_{1v}^w \theta_w^u,$$

$$\theta_1^1 = \omega_1^1 + \Lambda_1^u \omega_u^1, \quad \theta_v^u = \omega_v^u - \Lambda_1^u \omega_v^1, \quad \theta_1^0 = \omega_1^0 + \Lambda_1^u \omega_u^0.$$

$$\vartheta_2^\tau = \omega_2^\tau + H_2^3 \omega_3^\tau, \quad \vartheta_2^0 = \omega_2^0 + H_2^3 \omega_3^0, \quad \vartheta_3^3 = \omega_3^3 - H_\tau^3 \omega_3^\tau.$$

Геометрические объекты $\{\Lambda_1^u, \Lambda_{1K}^u\}, \{H_\sigma^3, H_{\sigma K}^3\}$ являются соответственно фундаментальными объектами I-го порядка соответственно Λ_1-распределения и H_2-распределения. Продолжая систему (I.7) уравнений и возникающие при этом последовательно системы дифференциальных уравнений, получим дифференциальные уравнения полей фундаментальных объектов последующих порядков распределения. Имеет место теорема существования:

Т е о р е м а 1. $\mathcal{H}$-распределение трехмерного проективного пространства существует с произволом трех функций трех аргументов.

2. Специализируем репер нулевого порядка, поместив вершины $\{A_\sigma\}$ в плоскость $H_2(A_0)$:

$$L_0 = A_0, \quad L_1 = A_1 + \Lambda_1^2 A_2, \quad L_2 = A_2, \quad L_3 = A_3. \tag{I.8}$$

В репере нулевого порядка $\{L_{\bar K}\}$, который обозначим $\mathcal{R}_L(\mathcal{H})$, в силу (I.4) получим

$$H_\sigma^3 = 0, \quad \Lambda_1^3 = 0. \tag{I.9}$$

Формы $\theta_{\bar J}^{\bar K}$, определяющие инфинитезимальные перемещения репера $\mathcal{R}_L(\mathcal{H})$, имеют следующее строение:

$$\begin{cases} \theta_0^0 = \omega_0^0, \quad \theta_0^1 = \omega_0^1, \quad \theta_0^2 = \omega_0^2 - \Lambda_1^2 \omega_0^1, \quad \theta_0^3 = \omega_0^3, \\ \theta_1^0 = \omega_1^0 + \Lambda_1^2 \omega_2^0, \quad \theta_1^1 = \omega_1^1 + \Lambda_1^2 \omega_2^1, \quad \theta_1^2 = B_{u}^2 \theta_0^1 + \Lambda_{1u}^2 \theta_0^u, \\ \theta_1^3 = B_{11}^3 \theta_0^1 + \Lambda_{1u}^3 \theta_0^u, \quad \theta_2^0 = \omega_2^0, \quad \theta_2^1 = \omega_2^1, \quad \theta_2^2 = \omega_2^2 - \Lambda_1^2 \omega_2^1, \\ \theta_2^3 = \omega_2^3 - H_{2K}^3 \omega_0^K, \quad \theta_3^0 = \omega_3^0, \quad \theta_3^1 = \omega_3^1, \quad \theta_3^2 = \omega_3^2 - \Lambda_1^2 \omega_3^1, \quad \theta_3^3 = \omega_3^3 \end{cases} \tag{I.10}$$

и удовлетворяют соответственно структурным уравнениям:

$$\begin{cases} \mathcal{D}\theta_{J}^{0} = \theta_{J}^{\bar\varkappa} \wedge \theta_{\bar\varkappa}^{0}, \quad \mathcal{D}\theta_{0}^{J} = \theta_{0}^{\bar\varkappa} \wedge \theta_{\bar\varkappa}^{J}, \quad \mathcal{D}\theta_{1}^{1} = \theta_{1}^{\bar\varkappa} \wedge \theta_{\bar\varkappa}^{1}, \\ \mathcal{D}\theta_{1}^{u} = \theta_{1}^{\bar\varkappa} \wedge \theta_{\bar\varkappa}^{u} + \Lambda^{u}_{1\varkappa L}\,\omega_{0}^{L} \wedge \omega_{0}^{\varkappa}, \quad \mathcal{D}\theta_{3}^{J} = \theta_{3}^{\bar\varkappa} \wedge \theta_{\bar\varkappa}^{J}, \\ \mathcal{D}\theta_{2}^{3} = \theta_{2}^{\bar\varkappa} \wedge \theta_{\bar\varkappa}^{3} + H^{3}_{2\varkappa L}\,\omega_{0}^{L} \wedge \omega_{0}^{\varkappa}, \quad \mathcal{D}\theta_{2}^{\sigma} = \theta_{2}^{\bar\varkappa} \wedge \theta_{\bar\varkappa}^{\sigma}. \end{cases} \tag{1.11}$$

Дифференциальные уравнения (I.5) $\mathcal{H}$-распределения в репере $\mathcal{R}_L(\mathcal{H})$ принимают вид:

$$\begin{cases} d\Lambda_{1}^{2} + \Lambda_{1}^{2}\theta_{2}^{2} + \Lambda_{1}^{2}\Lambda_{1}^{2}\theta_{2}^{1} - \Lambda_{1}^{2}\theta_{1}^{1} + \omega_{1}^{2} = \Lambda_{1\varkappa}^{2}\,\omega_{0}^{\varkappa}, \\ \omega_{2}^{3} = H_{2\varkappa}^{3}\,\omega_{0}^{\varkappa}, \qquad \omega_{1}^{3} = H_{1\varkappa}^{3}\,\omega_{0}^{\varkappa}, \end{cases} \tag{1.12}$$

а компоненты $\{\Lambda^2_{1\varkappa}, H^3_{2\varkappa}, H^3_{1\varkappa}\}$ фундаментального объекта 1-го порядка $\mathcal{H}$-распределения удовлетворяют условиям (1.7). Мы рассматриваем регулярные $\mathcal{H}$-распределения [1], т.е. $\mathcal{H}$-распределения, для которых тензор 1-го порядка $B^3_{11} = \Lambda^3_{11} + \Lambda^3_{12}\Lambda^2_1$ является невырожденным.

О п р е д е л е н и е. $\mathcal{H}$-распределение назовем голономным [2], [3], если его базисное Λ_1-распределение голономно [4].

К уравнениям (I.I2), определяющим $\mathcal{H}$-распределение в репере $\mathcal{R}_L(\mathcal{H})$, присоединим систему уравнений

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_0^2 = \Lambda_1^2\,\omega_0^1. \tag{1.13}$$

Учитывая (1.13), из системы (1.12) получим

$$\omega_1^3 = (H^3_{11} + H^3_{12}\Lambda^2_1)\omega_0^1, \quad \omega_2^3 = (H^3_{21} + H^3_{22}\Lambda^2_1)\omega_0^1. \tag{1.14}$$

Уравнения (1.13), (1.14) при смещении центра L_0 вдоль кривой V_1, определяемой уравнениями

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_0^2 = \Lambda_1^2\,\omega_0^1, \quad \omega_0^1 = \mu^1\theta, \tag{1.15}$$

задают одномерную гиперполосу H_1 в репере $\mathcal{R}_L(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда

$$H^3_{21} = H^3_{12}, \quad \Lambda^2_{11} = 0. \tag{1.16}$$

Действительно, при условии (1.16) получим из (1.I3), (1.14) дифференциальные уравнения одномерной гиперполосы $H_1 \subset P_3$ [5], [6]:

$$\omega_0^3 = 0, \ \omega_0^2 = \Lambda_1^2\,\omega_0^1, \ \omega_1^3 = \Lambda^3_{11}\,\omega_0^1, \ \omega_2^3 = B^3_{21}\,\omega_0^1, \tag{1.17}$$

где

$$\Lambda^3_{11} = H^3_{11} + \Lambda^2_1 H^3_{12}, \quad B^3_{21} = H^3_{21} + \Lambda^2_1 H^3_{22}, \quad B^3_{21} = B^3_{12}.$$

Верно и обратное утверждение. Итак, условия (1.16) являются аналитическими условиями голономности $\mathcal{H}$-распределения.

Геометрическая интерпретация голономности $\mathcal{H}$-распределения означает, что базисное Λ_1-распределение порождает двупараметрическое семейство кривых V_1 (прямые Λ_1 огибаются кривыми V_1 двупараметрического семейства) такое, что при смещении центра L_0 вдоль фиксированной кривой V_1 (I.I5) уравнения (I.I2), (I.I3) являются дифференциальными уравнениями одномерной гиперполосы H_1. Другими словами, проективное пространство P_3 расслаивается на двупараметрическое семейство одномерных гиперполос H_1, базисными кривыми которых служат кривые семейства (V_1).

§ 2. Поля нормалей 1-го и 2-го рода Нордена-Тимофеева $\mathcal{H}$-распределения

1. Следуя работам [4], [3], находим систему уравнений

$$y^1 - \chi^1_2\,y^2 = 0, \quad y^3 = 0, \tag{2.I}$$

где

$$\chi^1_2 \overset{def}{=\!=} -B^3_{21}B^{11}_3, \quad \overset{(\theta)}{\nabla}\chi^1_2 + \theta^1_2 = \chi^1_{2\varkappa}\,\omega_0^{\varkappa}, \tag{2.2}$$

которые в локальном репере $\mathcal{R}_L(\mathcal{H})$ задают характеристику $\chi(L_0)$ гиперплоскости $H_2(L_0)$ при смещении центра L_0 по кривым

$$\theta^3_0 = \theta^2_0 = 0, \ \theta^1_0 = \mu^1\theta, \ \overset{(\theta)}{\nabla}\mu^1 - \mu^1(\theta^0_0 + \theta_1) = \mu^1_1\theta, \ \mathcal{D}\theta = \theta \wedge \theta_1, \tag{2.3}$$

принадлежащим Λ_1-распределению. Из уравнений (2.2) вытекает, что поле квазитензора $\{\chi^1_2\}$, определяемое дифференциальным уравнением (2.2), задает χ-распределение, т.е. распределение характеристик данного $\mathcal{H}$-распределения. Отметим, что для регулярного $\mathcal{H}$-распределения прямая $\Lambda_1(L_0)$ и прямая $\chi(L_0)$ имеют только одну общую точку L_0, т.е.

$$\chi(L_0) \cap \Lambda_1(L_0) = L_0, \quad [\chi(L_0), \Lambda_1(L_0)] = H_2(L_0).$$

2. Зададим произвольную внутреннюю инвариантную одномерную нормаль $\nu(L_0)$ 1-го рода гиперплоскости $H_2(L_0)$ в каждом центре L_0 относительно репера $\mathcal{R}_L(\mathcal{H})$ системой уравнений

$$y^\sigma - \nu^\sigma_3\,y^3 = 0, \quad \overset{(\theta)}{\nabla}\nu^\sigma_3 + \theta^\sigma_3 = \nu^\sigma_{3\varkappa}\,\omega_0^{\varkappa}. \tag{2.4}$$

Тогда плоскость $N_2(L_0) = [\nu(L_0), \chi(L_0)]$ является инвариантной нормалью I-го рода в смысле Нордена[7] прямой $\Lambda_1(L_0) \subset P_3$, уравнение которой в репере $\mathcal{R}_L(\mathcal{H})$ имеет вид

$$y^1 = \chi^1_2\,y^2 + (\nu^1_3 - \chi^1_2\nu^2_3)y^3. \tag{2.5}$$

Найдем фокальное многообразие [4] в плоскости $N_2(L_0)$ при смещении центра по кривым (2.3), принадлежащим Λ_1-распределению:

$$y^0+y^2(\hat{\chi}^1_{21}-B^2_{11}\chi^1_2\chi^1_2)+y^3(\hat{\nu}^1_{31}-\hat{\chi}^1_{21}\nu^2_3-\chi^1_2\hat{\nu}^2_{31}-B^3_{11}\tilde{\nu}^1_3\tilde{\nu}^1_3-$$
$$-B^2_{11}\chi^1_2\tilde{\nu}^1_3)=0,\ y^1=\chi^1_2 y^2+\tilde{\nu}^1_3 y^3. \qquad (2.6)$$

Система уравнений (2.6) задает прямую $p(L_0)\subset N_2(L_0)$, не проходящую через точку L_0. Пересечение прямых $\chi(L_0)$ и $p(L_0)$ есть инвариантная точка $P(L_0)$, которая определяется системой уравнений:

$$y^1=\chi^1_2 y^2,\ y^3=0,\ y^0=k_2 y^2, \qquad (2.7)$$

где
$$k_2=-\hat{\chi}^1_{21}+B^2_{11}\chi^1_2\chi^1_2\ ,\ \overset{(0)}{\nabla}k_2+\chi^1_2\theta^0_1+\theta^0_2=k_{2K}\omega^K_0. \qquad (2.8)$$

Таким образом, квазитензор $\{\chi^1_2, k_2\}$ в каждом центре L_0 $\mathcal{H}$-распределения задает точку $P(L_0)\neq L_0$, которую назовем точкой Кенигса пары распределений (Λ_1,χ) [3], [4], [8].

3. Аналогично, в плоскости $\mathcal{H}_2(L_0)=[\Lambda_1,\nu]$ найдем фокальное многообразие $q(\chi)$ при смещении центра L_0 вдоль кривых

$$\theta^3_0=0,\ \theta^2_0=\mu^2\theta,\ \theta^1_0=\chi^1_2\theta^2_0,\ D\theta=\theta\wedge\hat{\theta}_1,\ \overset{(0)}{\nabla}\mu^2-(\theta^0_0+\hat{\theta}_1)\mu^2=\mu^2\theta, \qquad (2.9)$$

принадлежащих χ-распределению (2.2).

Искомое фокальное многообразие $q(\chi)$ задается системой уравнений

$$y^0+y^1[\Lambda^2_{12}+B^2_{11}\chi^1_2-\nu^2_3(\Lambda^3_{12}+B^3_{11}\chi^1_2)]+y^3[\nu^2_{32}+\hat{\nu}^2_{31}\chi^1_2-$$
$$-(H^3_{22}+B^3_{21}\chi^1_2)\nu^2_3\nu^2_3]=0,\quad y^2=\nu^2_3 y^3 \qquad (2.10)$$

и представляет собой прямую $q(L_0)\subset\mathcal{H}_2(L_0)$, не проходящую через точку L_0. Соответствующая прямая $\Lambda_1(L_0)\subset\mathcal{H}_2(L_0)$ пересекает прямую $q(L_0)$ в точке $Q(L_0)$, координаты которой имеют вид

$$y^0=f_1 y^1,\ y^2=0,\ y^3=0, \qquad (2.11)$$

где
$$f_1\overset{def}{=}-\Lambda^2_{12}-B^2_{11}\chi^1_2+(\Lambda^3_{12}+B^3_{11}\chi^1_2)\nu^2_3,\ \overset{(0)}{\nabla}f_1+\theta^0_1=f_{1K}\omega^K_0. \qquad (2.12)$$

Из уравнений (2.12), (2.11) следует, что квазитензор $\{f_1\}$ в каждом центре L_0 задает на прямой $\Lambda_1(L_0)$ инвариантную точку $Q(L_0)\neq L_0$ при смещении центра L_0 вдоль соответствующей кривой, принадлежащей χ-распределению.

4. Инвариантные точки $P(L_0)$ и $Q(L_0)$ определяют инвариантную прямую $p(L_0)=[P;Q]$, которая в репере $\mathcal{R}_1(\mathcal{H})$ задается системой уравнений

$$y^0-p_\sigma y^\sigma=0,\ y^3=0. \qquad (2.13)$$

Из соотношений (2.7) и (2.11) следует, что

$$p_1=f_1,\ p_2=k_2-f_1\chi^1_2. \qquad (2.14)$$

Компоненты (2.14) геометрического объекта $\{p_\sigma\}$ существенно зависят от выбранной нами одномерной нормали ν H_2-распределения и удовлетворяют уравнениям

$$dp_\sigma+p_\tau\theta^\tau_\sigma+p_\sigma\theta^0_0+\theta^0_\sigma=p_{\sigma K}\omega^K_0 \qquad (2.15)$$

Построенную прямую $p(L_0)$ (2.13) назовем прямой Нордена-Тимофеева [9],[10],[8], ассоциированной с одномерной нормалью $\nu(L_0)$ [3]. Поле квазитензора $\{p_\sigma\}$ (2.15), присоединенного к группе с инвариантными формами $\bar\theta^\tau_\sigma, \bar\theta^0_\sigma, \theta^0_0$, определяет поле нормалей 2-го рода $\mathcal{H}$-распределения.

Следуя работе [3], находим, что в проективитете Бомпьяни-Пантази

$$\mathfrak{P}^\tau_3=-A^{\tau\sigma}_3(p_\sigma+A^3_{\sigma3}),\ A^{\tau\sigma}_3 A^3_{\sigma\xi}=\delta^\tau_\xi \qquad (2.16)$$

в каждом центре L_0 нормали 2-го рода $p(L_0)$ ставится в соответствие нормаль I-го рода $\mathfrak{P}(L_0)$, которую назовем нормалью I-го рода Нордена-Тимофеева.

Т е о р е м а 2. В дифференциальной окрестности порядка $t\geqslant 2$ (t -порядок внутренней инвариантной нормали $\nu(L_0)$ I-го рода H_2-распределения) поля квазитензоров $\{\mathfrak{P}^\sigma_3\}$ и $\{p_\sigma\}$ задают инвариантные поля нормалей I-го и 2-го рода Нордена-Тимофеева $\mathcal{H}$-распределения, соответствующие друг другу в проективитете Бомпьяни-Пантази (2.16).

§ 3. Инвариантные оснащения Λ_1-распределения в смысле Картана

I. Рассмотрим в каждом центре L_0 инвариантную плоскость $\mathcal{L}(L_0)=[\mathfrak{P},\chi]$, натянутую на одномерную инвариантную нормаль $\mathfrak{P}(L_0)$ I-го рода Нордена-Тимофеева и характеристику $\chi(L_0)$, которую относительно репера $\mathcal{R}_1(\mathcal{H})$ зададим уравнением

$$y^1=\mathcal{L}^1_u y^u \quad (\mathcal{L}^1_2=\chi^1_2,\ \mathcal{L}^1_3=\mathfrak{P}^1_3-\chi^1_2\mathfrak{P}^2_3). \qquad (3.1)$$

В плоскости $\mathcal{L}(L_0)$ найдем фокальное многообразие $\mathfrak{P}_1(\Lambda_1)$, соответствующее прямой Λ_1 и ассоциированное с инвариантной нормалью $\mathfrak{P}(L_0)$. Многообразие $\mathfrak{P}_1(\Lambda_1)$ в репере $\mathcal{R}_1(\mathcal{H})$ определяется системой уравнений

$$\begin{cases} y^0+y^2(\hat{\chi}^1_{21}-B^2_{11}\chi^1_2\chi^1_2)+y^3(\hat{\mathcal{L}}^1_{31}-B^3_{11}\mathcal{L}^1_3\mathcal{L}^1_3-B^2_{11}\chi^1_2\mathcal{L}^1_3)=0, \\ y^1=\mathcal{L}^1_2 y^2+\mathcal{L}^1_3 y^3 \end{cases} \qquad (3.2)$$

Величины $\mathcal{L}^1_2=\chi^1_2$ и $\mathcal{L}^1_3$ удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\overset{(\theta)}{\nabla} \mathcal{L}_2^1 + \theta_2^1 = \mathcal{L}_{2K}^1 \omega_0^K, \quad \overset{(\theta)}{\nabla} \mathcal{L}_3^1 - \chi_2^1 \theta_3^2 + \theta_3^1 = \mathcal{L}_{3K}^1 \omega_0^K.$$

Линейная поляра центра L_0 относительно фокального многообразия $\nu_1(\Lambda_1)$ в репере $\mathcal{R}_L(\mathcal{H})$ определяется следующей системой уравнений [11],[12]:

$$y^1 = \mathcal{L}_2^1 y^2 + \mathcal{L}_3^1 y^3, \quad y^0 = \ell_2 y^2 + \ell_3 y^3, \tag{3.3}$$

где $\ell_2 \overset{def}{=} -\hat{\chi}_{21}^1 + B_{11}^2 \chi_2^1 \chi_2^1 = k_2, \quad \ell_3 \overset{def}{=} -\hat{\mathcal{L}}_{31}^1 + B_{11}^3 \mathcal{L}_3^1 \mathcal{L}_3^1 + B_{11}^2 \mathcal{L}_2^1 \mathcal{L}_3^1,$

$$\overset{(\theta)}{\nabla} \ell_2 = -\mathcal{L}_2^1 \theta_1^0 - \theta_2^0 + \ell_{2K} \omega_0^K, \quad \overset{(\theta)}{\nabla} \ell_3 = \ell_2 \theta_3^2 - \mathcal{L}_3^1 \theta_1^0 - \theta_3^0 + \ell_{3K} \omega_0^K.$$

Следовательно, геометрический объект $\{\mathcal{L}_u^1, \ell_u\}$, присоединенный к группе с инвариантными формами $\theta_u^1, \theta_2^0, \theta_0^0, \theta_1^0$, определяет в плоскости $\mathcal{L}(L_0)$ оснащающую прямую $\ell(L_0)$, внутренне присоединенную к Λ_1-распределению – прямую Картана в плоскости $\mathcal{L}(L_0)$, проходящую через точку $P(L_0)$ (2.7) [13].

2. Следуя работе [14], построим в плоскости $\mathcal{L}(L_0)$ еще одну прямую Картана (отличную от прямой $\ell(L_0)$), инвариантно присоединенную к Λ_1-распределению. Для этого предварительно найдем многообразие $\nu_0^2(H_2)$ фокальных точек нормали $\nu(L_0)$ при смещении центра L_0 по кривым

$$\theta_0^3 = 0, \quad \theta_0^\sigma = \rho^\sigma \theta, \quad d\theta = \theta \wedge \tilde{\theta}_1, \tag{3.4}$$

принадлежащим текущему элементу H_2-распределения, т.е. плоскости $H_2(L_0)$. Искомое фокальное многообразие $\nu_0^2(H_2)$ относительно репера $\mathcal{R}_L(\mathcal{H})$ задается системой уравнений:

$$а)\ \delta_\tau^\sigma y^0 + y^3(\nu_{3\tau}^\sigma - \nu_3^\sigma \nu_3^\rho B_{\rho\tau}^3) = 0, \quad б)\ y^\sigma = \nu_3^\sigma y^3, \tag{3.5}$$

где $\nu_{3\tau}^\sigma = \{\hat{\nu}_{31}^\sigma, \hat{\nu}_{32}^\sigma = \nu_{32}^\sigma\}, \quad \hat{\nu}_{31}^\sigma = \nu_{31}^\sigma + \nu_{32}^\sigma \Lambda_1^2.$

В общем случае система (3.5) определяет две фокальные точки нормали $\nu(L_0)$, которым в текущей гиперплоскости $H_2(L_0)$ соответствуют два несовпадающих направления – направления кривизны нормали $\nu(L_0)$ [14], [4]. Эти направления кривизны в репере $\mathcal{R}_L(\mathcal{H})$ определяются следующей системой уравнений

$$[y^0 \delta_\tau^\sigma + y^3(\hat{\nu}_{3\tau}^\sigma - \nu_3^\sigma \nu_3^\rho B_{\rho\tau}^3]\mu^\tau \theta = 0, \quad \theta_0^3 = 0, \tag{3.6}$$

где y^3 – корни уравнения (3.5а).

Заметим, что в силу (3.5а) ранг системы (3.6) в общем случае равен двум. Согласно [14] точка Кенигса $K(\nu)$ нормали $\nu(L_0)$ определяется объектом $\{\nu_3^\sigma, \nu_3\}$:

$$K(\nu) = L_3 + \nu_3^\sigma L_\sigma + \nu_3 L_0, \tag{3.7}$$

где

$$\nu_3 = -\tfrac{1}{2}(\hat{\nu}_{3\sigma}^\sigma - \nu_3^\sigma \nu_3^\rho B_{\rho\sigma}^3).$$

Величина ν_3 в репере $\mathcal{R}_L(\mathcal{H})$ удовлетворяет уравнению

$$\overset{(\theta)}{\nabla} \nu_3 + \nu_3^\sigma \theta_\sigma^0 + \theta_3^0 = \nu_{3K} \omega_0^K. \tag{3.8}$$

Итак, на одномерной нормали $\nu(L_0)$ мы построили две инвариантные точки.

3. Точка Кенигса $K(\nu)$ нормали $\nu(L_0)$ и точка Кенигса $P(L_0)$, лежащая на прямой $\chi(L_0)$, натягивают прямую $K(L_0) = [K(\nu), P]$, не проходящую через центр. Прямая $K(L_0)$ является инвариантной в смысле Картана оснащающей прямой для элемента Λ_1-распределения, которая в репере $\mathcal{R}_L(\mathcal{H})$ задается системой уравнений

$$y^1 = \mathcal{L}_u^1 y^u, \quad y^0 = \mathcal{K}_u y^u \quad (\mathcal{K}_2 = k_2, \ \mathcal{K}_3 = \nu_3 - k_2 \nu_3^2). \tag{3.9}$$

Таким образом, в каждой плоскости $\mathcal{L}(L_0)$ нами построены две несовпадающие между собой оснащающие по Картану прямые $\ell(L_0)$ и $K(L_0)$ (охваты компонент объектов, задающих прямые $\ell(L_0)$ и $K(L_0)$, не сопадают) для прямой $\Lambda_1(L_0)$, проходящие через точку $P(L_0)$.

Т е о р е м а 3. В дифференциальной окрестности порядка $t+1$ (t – порядок внутренней инвариантной нормали ν H_2-распределения) однопараметрический пучок квазитензоров $\{\mathcal{L}_u^1, \varepsilon \mathcal{K}_u + (1-\varepsilon)\ell_u\}$ задает для Λ_1-распределения в плоскости $\mathcal{L}(L_0) = [\nu, \chi]$ пучок оснащающих прямых в смысле Картана с центром в точке $P(L_0)$ (2.7).

Библиографический список

1. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т.7. С.117-151.

2. П о п о в Ю.И. Трехсоставные распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}^r$ проективного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1982. 126 с. Библиогр. 20 назв. Деп. в ВИНИТИ 16.12.82, № 6192-92.

3. П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. I / Калининг. ун-т. Калининград, 1984. 93 с. Библиогр. 21 назв. Деп. в ВИНИТИ 2.07.84, № 4481-84.

4. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения

m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

5. В а с и л я н М.А. О проективно-дифференциальной геометрии однопараметрических гиперполос // Дифференциальная геометрия. Калинин, 1977. С.38-45.

6. Ш е й д е р о в а Н.М. К теории одномерных регулярных гиперполос проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1982. Вып.13. С.118-124.

7. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

8. Б а л а з ю к Т.Н. Дифференциальная геометрия m-мерных линейных элементов, оснащенных конусом. I / ВИНИТИ АН СССР. М., 1978. 35 с. Деп. в ВИНИТИ 24.01.78. № 267-78 Деп.

9. Н о р д е н А.П., Т и м о ф е е в В.Н. Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств // Изв. вузов. Математика, 1972. № 8. С.81-89.

10. Д о м б р о в с к и й Р.Ф. О неголономных композициях на поверхностях $M_{m,r}$ в P_n // Всес. конф. по неевклид. геометрии "150 лет геометрии Лобачевского": Тезисы докл. Казань, 1976. С.69.

11. П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределением проективного пространства. II / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. 36 с. Библиогр. 8 назв. Деп. в ВИНИТИ 9.01.85. № 252 - 85 Деп.

12. П о п о в Ю.И. Трехсоставные распределения проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.65-86.

13. Cartan E., Les espaces a connection projective // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу. М., 1937. Т.4. С.147-159.

14. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.71-120.

УДК 514.75

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПАРЫ Т КОНГРУЭНЦИЙ, У КОТОРЫХ РАВНЫ МЕЖДУ СОБОЙ ПРОИЗВЕДЕНИЯ АБСЦИСС ФОКУСОВ

О.С.Р е д о з у б о в а

(Московский государственный педагогический университет)

Рассматриваются свойства специальных пар Т конгруэнций в E_3 , у которых равны между собой произведения абсцисс соответствующих фокусов. Специальными парами Т конгруэнций назвали такие пары Т, у которых общий перпендикуляр соответствующих прямых пары перпендикулярен общему перпендикуляру пары дополнительных конгруэнций. Такие пары обозначены буквой Т′ [1].

К конгруэнции присоединен ортонормированный репер $R = (O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, вершина которого $O \in r$ ($\{r\}$ – конгруэнция общих перпендикуляров пар Т′ конгруэнций $\{r_a\}$ $(a=1,2)$), $\vec{e}_3 \parallel r$. Соответствующие прямые пары r_a образуют с вектором $\vec{e}_1$ углы α_a . Прямые r пересекают r_a в точках K_a . По отношению к реперу $(O,\vec{e}_3)$ на прямой r точки имеют координаты h_a . Направляющие векторы прямых r_a есть орты

$$\vec{\eta}_a = \vec{e}_1 \cos\alpha_a + \vec{e}_2 \sin\alpha_a .$$

Фокусы прямых r_a есть точки F_a и F'_a . Абсциссы фокусов относительно реперов $(K_a, \vec{\eta}_a)$ есть соответственно ρ_a и ρ'_a .

В соответствии с работой [1] специальные пары Т конгруэнций определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} Q_1 = \Omega_{13}\dfrac{t\rho_1\rho'_1}{h_1-h_2}, \quad Q_2 = \Omega_{23}\dfrac{t\rho_1\rho'_1}{h_1-h_2}, \quad \rho_2 = t\rho_1,\ \rho'_2 = t\rho'_1 \ (t \neq 0), \\ A_1 = \Omega_{13}\dfrac{t(\rho_1+\rho'_1)}{h_1-h_2} + H_1 t, \quad A_2 = \Omega_{23}\dfrac{\rho_1+\rho'_1}{h_1-h_2} + H_2\dfrac{1}{t}. \end{cases} \qquad (I)$$

Произвол существования таких пар – одна функция двух аргументов. Здесь использованы следующие обозначения:

$$\Omega_a = \omega^1 \cos\alpha_a + \omega^2 \sin\alpha_a, \quad \Omega^*_a = \omega^1 \sin\alpha_a - \omega^2 \sin\alpha_a,$$

$$\Omega_{a3} = \omega^3_1 \cos\alpha_a + \omega^3_2 \sin\alpha_a, \quad \Omega^*_{a3} = -\omega^3_1 \sin\alpha_a + \omega^3_2 \cos\alpha_a,$$

$$A_a = \frac{\omega^2_1 + d\alpha_a}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}, \quad H_a = \frac{\omega^3 + dh_a}{h_1-h_2}, \quad Q_a = \frac{\Omega^*_a + h_a\Omega^*_{a3}}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}.$$