УДК 514.75

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА В ПРОСТРАНСТВО ГИПЕРКВАДРИК

И.С.А л е ш н и к о в

(Калининградский государственный университет)

Получено обобщение характеристических направлений точечных отображений для дифференцируемого отображения аффинного пространства A_n в пространство центральных невырожденных гиперквадрик другого аффинного пространства A_m и дана их геометрическая интерпретация.

Пусть $R(q)$ – пространство центральных невырожденных гиперквадрик аффинного пространства A_m. Поместим начало репера пространства A_m в центр C° произвольного элемента $q^\circ \in R(q)$. Тогда уравнение гиперквадрики q° принимает вид:

$$F \equiv a_{ij} x^i x^j - 1 = 0 \quad (a_{ij} = a_{ji}, \ \det[a_{ij}] \neq 0; \ i,j = \overline{1,m}). \qquad (1)$$

Структурными формами пространства $R(q)$ являются формы Пфаффа:

$$\omega^i, \ \nabla a_{ij} = d a_{ij} - a_{ik}\omega^k_j - a_{kj}\omega^k_i,$$

где ω^i, ω^k_j $(i,j,k = \overline{1,m})$ – компоненты инфинитезимальных перемещений подвижного репера r пространства A_m. Таким образом, для ранга N [1] гиперквадрики $q \in R(q)$ имеем

$$N = m + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (m+1).$$

Пусть A_n – аффинное пространство, отнесенное к подвижному реперу R, компоненты инфинитезимальных перемещений которого Ω^I, Ω^J_K $(I,J,K,L = \overline{1,n})$. Рассмотрим локальное дифференцируемое отображение $f: A_n \longrightarrow R(q)$ пространства A_n в пространство $R(q)$. Частный случай отображения f рассматривался в работе [2]. Пусть $P^\circ \in A_n$ и $f(P^\circ) = q^\circ$. Поместим начало репера R в точку P°, тогда система дифференциальных уравнений отображения f имеет вид:

$$\nabla a_{ij} = \Lambda_{ijI}\Omega^I, \quad \omega^i = \Lambda^i_I \Omega^I. \qquad (2)$$

Продолжая (2) два раза, получаем:

$$\nabla \Lambda_{ijI} = \Lambda_{ijIK}\Omega^K, \quad \nabla\Lambda^i_I = \Lambda^i_{IK}\Omega^K;$$

$$\nabla \Lambda_{ijJK} = \Lambda_{ijJKL}\Omega^L, \quad \nabla \Lambda^i_{JK} = \Lambda^i_{JKL}\Omega^L.$$

Система величин $\Gamma^2 = \{a_{ij}, \Lambda^i_J, \Lambda_{ijJ}, \Lambda^i_{JK}, \Lambda_{ijJK}\}$ образует фундаментальный объект второго порядка отображения f. Будем в дальнейшем предполагать, что $n \geqslant X$.

Рассмотрим отображение $z: R(q) \to R(q)$, которое гиперквадрике $q = f(P)$, задаваемой уравнением: $b_{ij}x^i x^j + 2b_i x^i - 1 = 0$, ставит в соответствие гиперквадрику $z(q)$, задаваемую уравнением: $b_{ij}x^i x^j - 1 = 0$. Пусть $q' \in R(q)$ – гиперквадрика, симметричная $q = f(P)$ относительно центра C^0. Тогда в пучке гиперквадрик, определяемом парой q и q', существует единственная гиперквадрика с центром в точке C^0; это гиперквадрика $z(q)$.

О п р е д е л е н и е I. Характеристическими прямыми отображения f в точке P^0 называются прямые связки $\{P^0\}$, принадлежащие множеству X, определяемому системой:

$$(\mu \Lambda^i_{JK} X^K - 2\Lambda^i_J)X^J = 0 \qquad (\mu \in \mathbb{R}),$$

$$(\mu \Lambda_{ijJK} X^K - 2\Lambda_{ijJ})X^J = 0.$$

Определенные таким образом прямые являются обобщением характеристических прямых точечного соответствия [3]. Для выяснения их геометрического смысла рассмотрим в $R(q)$ кривую $\ell: \mathbb{R} \to R(q)$, $\ell(0) = q^0$. Ее дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\omega^i = \Lambda^i \theta, \quad \nabla a_{ij} = \Lambda_{ij}\theta \qquad (\theta = dt,\ t \in \mathbb{R}),$$

а ее геометрический объект второго порядка $\{\Lambda^i, \Lambda_{ij}, M^i, M_{ij}\}$ определяет следующее разложение в ряд Тейлора:

$$\begin{cases} c^i = \Lambda^i t + \frac{1}{2}M^i t^2 + \langle 3 \rangle, \\ b_{ij} = a_{ij} + \Lambda_{ij}t + \frac{1}{2}M_{ij}t^2 + \langle 3 \rangle, \end{cases} \tag{3}$$

где c^i – координаты центра гиперквадрики $\ell(t)$, а величины b_{ij} определяют гиперквадрику $z(\ell(t))$.

О п р е д е л е н и е 2. Кривая $\ell: \mathbb{R} \to R(q)$ называется инфлексионной в элементе $\ell(0)$, если выполняются условия:

$$M^i = k\Lambda^i, \quad M_{ij} = k\Lambda_{ij} \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

Для изучения геометрической характеристики свойства инфлексионности рассмотрим специальное I-параметрическое семейство гиперквадрик, в некотором смысле обобщающее прямую в A_m. Будем называть цепью I-параметрическое семейство (3) гиперквадрик $q(t)$, если:

$$c^i = \Lambda^i t, \quad b_{ij} = a_{ij} + \Lambda_{ij}t. \tag{4}$$

О п р е д е л е н и е 3. I-параметрическое семейство гиперквадрик $q(t)$ называется полуцепью, если гиперквадрики $z(q(t))$ образуют пучок, а центры гиперквадрик $q(t)$ образуют прямую.

Таким образом, полуцепь определяется условиями:

$$c^i = \Lambda^i \tau = \Lambda^i g(t), \quad b_{ij} = a_{ij} + \Lambda_{ij}t,$$

где $\tau = g(t)$ – некоторая функция от t. Для выделения цепей из множества полуцепей остается охарактеризовать условие: $g(t) = t$.

Пусть дан вектор $\vec{v} = \{v^i\}$. В общем случае поляра конца вектора $\{v^i\}$ относительно гиперквадрики $z(q(t))$:

$$(a_{ij} + \Lambda_{ij}t)x^i x^j - 1 = 0$$

имеет вид:

$$v^i(a_{ij} + \Lambda_{ij}t)x^j - 1 = 0.$$

Координаты же полюса $\vec{r}(t)$ указанной поляры относительно гиперквадрики $q(0) = q^0$ (I) имеют вид:

$$y^i(t) = v^i + a^i t \qquad (a^i = a^{ik}\Lambda_{kj}v^j, \quad a^{ik}a_{kj} = \delta^i_j).$$

Пусть $\vec{c}(t)$ – радиус-вектор центра гиперквадрики $q(t)$, $\vec{x}(t) = \vec{r}(t) - \vec{c}(t)$, тогда координаты вектора $\vec{x}(t)$ записываются в виде:

$$x^i(t) = v^i + a^i t - \Lambda^i g(t). \tag{5}$$

О п р е д е л е н и е 4. Кривая в A_m, описанная концом вектора $\vec{x}(t)$, называется $\vec{v}$ -дифферентной кривой.

Т е о р е м а I. Полуцепь является цепью тогда и только тогда, когда ее $\vec{v}$-дифферентная кривая является прямой, отнесенной к параметру t, и выполняются условия:

$$\vec{x}(0) = \vec{v}, \quad \left.\frac{d\vec{x}}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0} - (g'(t))^{-1} \cdot \left.\frac{d\vec{c}}{dt}\right|_{t=0}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g(t) = t$, тогда

$$x^i(t) = v^i + (a^i - \Lambda^i)t, \quad x^i(0) = v^i, \quad \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0} = a^i - \Lambda^i.$$

Пусть $g(t) \neq t$, тогда а) $g(t) = k \cdot t$, либо б) $g(t) \neq kt$. В случае а) $\left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0} \neq a^i - \Lambda^i$, в случае б) кривая (5) не является прямой.

О п р е д е л е н и е 5. Цепь, имеющая касание I-го порядка с кривой $\ell: \mathbb{R} \to R(q)$ в элементе $\ell(0)$, называется касательной к кривой ℓ в элементе $\ell(0)$.

Теорема 2. Кривая $\ell: \mathbb{R} \to R(q)$ является инфлексионной в элементе $\ell(0)$ кривой тогда и только тогда, когда касательная к ней в элементе $\ell(0)$ цепь имеет с этой кривой в $\ell(0)$ геометрическое касание 2-го порядка.

Доказательство непосредственно следует из формул (3), (4) и определений 2, 4.

Теорема 3. Направление, определяемое в точке P^0 инфлексионной в ней кривой ℓ, является характеристическим направлением отображения f тогда и только тогда, когда кривая $f \circ \ell$ является инфлексионной в элементе $f(\ell(0))$ кривой.

Доказательство. Пусть $\ell: \mathbb{R} \to A_n: \ell(0) = P^0$ – инфлексионная в P^0 кривая, тогда:

$$X^J = \Lambda^J (t + \tfrac{1}{2} k t^2) + <3>.$$

Из разложения в ряд Тейлора отображения f:

$$c^i = \Lambda^i_J X^J + \tfrac{1}{2} \Lambda^i_{JK} X^J X^K + <3>,$$

$$b_{ij} = a_{ij} + \Lambda_{ijJ} X^J + \tfrac{1}{2} \Lambda_{ijJK} X^J X^K + <3>$$

и определений I, 2 следует утверждение теоремы.

Библиографический список

I. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геометрич. семинара / ВИНИТИ. I969. Т.2. С.I79-206.

2. Андреев Б.А. О дифференцируемом соответствии между точечным пространством и многообразием $R_N(Q)$ гиперквадрик аффинного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I978. Вып.9. С.II-I9.

3. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия, I963. Итоги науки / ВИНИТИ. М., I965. С.65-I07.

УДК 514.8

О ЛОКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ МЕТРИК НА ГЛАДКОМ МНОГООБРАЗИИ, СВЯЗАННЫХ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ПОЛИСИСТЕМАМИ

С.И.Алешников

(Калининградский государственный университет)

В работах [1], [2], [3] изучались метрики, порождаемые динамическими полисистемами на гладком многообразии. Настоящая работа завершает исследование локальной структуры таких метрик.

Пусть V –связное компактное многообразие класса C^∞ размерности N, на котором определены полные попарно коммутирующие векторные поля X_i $(1 \le i \le N)$ класса C^∞, такие, что для любой точки $a \in V$ векторы $X_1(a), \dots, X_N(a)$ линейно независимы в касательном пространстве $T_a(V)$, g - риманова метрика, δ - расстояние на V, описанные в [1].

Предложение I. Пусть W – замкнутое интегральное многообразие одного из полей X_i, $x_0 \in V$. Тогда множество точек локальных минимумов функции $y \mapsto \delta(x_0, y)$, где $y \in W$, конечно.

Доказательство. I) Обозначим $\mathcal{D}$ –множество точек локальных минимумов функции $y \mapsto \delta(x_0, y)$ на множестве W. Покажем, что $\mathcal{D}$ состоит из изолированных точек. Пусть $y_0 \in \mathcal{D}$. Это значит, что существует окрестность O_{y_0} точки y_0 в W, такая, что $\delta(x_0,y) \ge \delta(x_0,y_0)$ для всех $y \in O_{y_0}$. В [3] было показано, что точка y_0 обладает такой окрестностью $\Omega_{y_0}(x_0)$ в W, что для всех $y_0 \in \Omega_{y_0}(x_0)$ выполняется

$$|\delta(x_0,y) - \delta(x_0,y_0)| = \delta(y,y_0). \qquad (I)$$

Тогда на пересечении $O_{y_0} \cap \Omega_{y_0}(x_0)$ имеем $\delta(x_0,y) = \delta(x_0,y_0) + \delta(y,y_0)$. Если $y \ne y_0$, то $\delta(y,y_0) > 0$, и в точке y_0 имеет место строгий локальный минимум. Ясно, что в $O_{y_0} \cap \Omega_{y_0}(x_0)$ больше нет точек из $\mathcal{D}$, за исключением y_0.

2) Покажем, что множество $\mathcal{D}$ замкнуто в W. Пусть $y_1 \in W$ и $y_1 \notin \mathcal{D}$. В силу непрерывности функции δ множества U_1 (соотв. U_2) тех $y \in \Omega_{y_1}(x_0)$, для которых $\delta(x_0,y) > \delta(x_0,y_1)$ (соотв. $\delta(x_0,y) < \delta(x_0,y_1)$) открыты в $\Omega_{y_1}(x_0)$. В силу условия (I), записанного для y_1 вместо y_0, получаем, что $\Omega_{y_1}(x_0) \setminus (U_1 \cup U_2) = \{y_1\}$.

2 Зак. 1606