метр. семинара / ВИНИТИ. М., I97I. Т.3. С.95-II4.

5. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геометр. семин ра / ВИНИТИ. М., I973. Т.4. С.7I-I20.

6. П о п о в Ю.И. Поля геометрических объектов гипер лосного распределения аффинного пространства / Калинингр. -т. Калининград, I987. Деп. в ВИНИТИ 2I.09.87. № 6807-В87.

7. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная ге метрия гиперполосного распределения m-мерных линейных эл ментов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., I975. Т.7. С.II I5I.

8. О с т и а н у Н.М. О канонизации подвижного репер погруженного многообразия / Rev. math. pures et appl (RPR). I962. V.7. № 2. P.23I-240.

УДК 5I4.75

ПАРЫ Т КОНГРУЭНЦИЙ, У КОТОРЫХ РАВНЫ МЕЖДУ СОБОЙ ФОКАЛЬНЫЕ РАССТОЯНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПРЯМЫХ ПАРЫ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПРЯМЫХ ПАРЫ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

О.С. Р е д о з у б о в а

(Московский государственный педагогический университет)

В евклидовом трехмерном пространстве рассмотрены таки пары Т конгруэнций, у которых равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых пары и фокальные расстоян соответствующих прямых пары дополнительных конгруэнций. Из чены свойства таких пар в общем случае. Пары обозначены бу вой T_p.

Поместим вершину O подвижного ортонормированного репе $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ на прямой конгруэнции $\{r\}$ общих перпен куляров, вектор $\vec{e}_3$ параллелен r. Компоненты инфинитезим льного перемещения репера ω^i, ω_i^j $(i,j = 1,2,3)$ удовлетворяют условиям

$$d\vec{O} = \vec{e}_i \omega^i, \quad d\vec{e}_i = \vec{e}_j \omega_i^j, \quad \omega_j^i = -\omega_i^j, \quad \omega_i^i = 0.$$

Прямые конгруэнции $\{r\}$ общих перпендикуляров пересека

ответствующие прямые r_a $(a = 1,2)$ в точках K_a. Направля ие векторы прямых r_a есть векторы $\vec{\eta}_a = \vec{e}_1 \cos\alpha_a + \vec{e}_2 \sin\alpha_a$; α_a – углы, образуемые прямыми r_a с вектором $\vec{e}_1$. Относи льно реперов $(K_a, \vec{\eta}_a)$ фокусы F_a, F_a' прямых r_a есть числа ρ_a, ρ_a', h_a – абсциссы точек K_a в репере $(O, \vec{e}_3)$. Условия, пределяющие пары Т конгруэнций в общем случае, можно записать виде системы уравнений (3) в [1, с.3].

Т е о р е м а I. Пары Т конгруэнций являются парами T_p огда и только тогда, когда это есть равнонаклонные пары 2-го ипа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем условия, определяю ие пары T_p конгруэнций в общем случае $(\rho_1'\rho_2 \neq \rho_1\rho_2')$. К ура нениям, определяющим пары Т конгруэнций, надо присоединить словия, полученные из равенств $F_1F_1' = F_2F_2'$ и $F_1F_2 = F_1'F_2'$:

$$|\rho_1 - \rho_1'| = |\rho_2 - \rho_2'|, \quad \sqrt{(\rho_1)^2 + (\rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + (h_1 - h_2)^2} =$$

$$= \sqrt{(\rho_1')^2 + (\rho_2')^2 - 2\rho_1'\rho_2'\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + (h_1 - h_2)^2}.$$

осле некоторых преобразований из полученных равенств имеем:

$$\rho_2' = \rho_2 - \rho_1 + \rho_1', \quad (\rho - \rho_1')(\rho_1' + \rho_2) = 0.$$

тсюда следует, что $\rho_1' = -\rho_2$, $\rho_2' = -\rho_1$. Как следует из [1, с.I4] акие пары есть равнонаклонные пары Т 2-го типа.

Верно и обратное. В соответствии с теоремами I2 и I3 из 1, с.15] пары Т конгруэнций 2-го типа обладают тем свойством, то у них равны между собой фокальные расстояния соответству щих прямых. Таким же свойством обладают и фокальные расстоя ия соответствующих прямых пары дополнительных конгруэнций $\{F_1, F_2\}$ и $\{F_1', F_2'\}$. Теорема доказана.

З а м е т и м, что в общем случае пары T_p конгруэнций пределяются системой уравнений (23) [1, с.I4] $(\rho_1'\rho_2 \neq \rho_1\rho_2')$ обозначениях (I) из [1, с.3]:

$$\begin{cases} \rho_1' = -\rho_2, \quad \rho_2' = -\rho_1, \quad H_a = A_a, \\ Q_1 = H(\rho_1 - \rho_2) - \Omega_{13}\dfrac{\rho_1\rho_2}{h_1 - h_2}, \quad Q_2 = -H_2(\rho_1 - \rho_2) - \Omega_{23}\dfrac{\rho_1\rho_2}{h_1 - h_2}. \end{cases} \qquad (I)$$

Известно, что такие пары существуют с произволом одной функ ции двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Пары T_p конгруэнций имеют постоянный угол между соответствующими прямыми тогда и только тогда, когда постоянно расстояние между соответствующими прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если у пары T_p конгруэнций постоянен угол между соответствующими прямыми, то $\alpha_1 - \alpha_2 = const$ и, следовательно, $A_1 = A_2 = A$. Из уравнений системы (I) следует что $H_1 = H_2 \equiv H$, т.е. постоянно расстояние между соответствующими прямыми. Обратное верно. Такие пары обозначены буквой $\tilde{T}$

Т е о р е м а 3. Пары T_p конгруэнций с постоянным углом между соответствующими прямыми и постоянным произведением абсцисс фокусов каждой конгруэнции пары, образованы конгруэнциями нормалей фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2 пары T_p с постоянным углом между соответствующими прямыми есть пары $\tilde{T}$ конгруэнций. По условию $\rho_1 \rho_1' = \rho_2 \rho_2' = const$. В соответствии с теоремой 2 из [2, с.79] пары $\tilde{T}$ конгруэнций с равными между собой и постоянными произведениями абсцисс фокусов каждой конгруэнции пары образованы нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

З а м е ч а н и е. Если, в частности, угол между соответствующими прямыми прямой, то в соответствии с теоремой 4 из [2, с.80] ортогональная пара T_p конгруэнций есть расслояемая пара, в число расслояющих поверхностей которой входят фокальные поверхности конгруэнции общих перпендикуляров.

Пары T конгруэнций с постоянным углом между соответствующими прямыми, у которых постоянны произведения абсцисс фокусов каждой из конгруэнций пары, определяются системой уравнений (I), к которой присоединяются уравнения:

$$A_1 = A_2 \equiv A, \quad H_1 = H_2 \equiv H, \quad A = H, \quad \rho_1 \rho_1' = \rho_2 \rho_2' = const. \qquad (2)$$

Независимых квадратичных уравнений системы (I), (2) два:

$$H \wedge \Delta - \Omega_{13} \wedge \Omega_{23} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)} = 0,$$

$$H_1 \wedge (\Omega_{13} + \Omega_{23}) \frac{\rho_1 - \rho_2}{h_1 - h_2} - (\Omega_{13} \wedge \Omega_{23}) \left(\frac{2\rho_1 \rho_2}{(h_1 - h_2)^2} - \frac{1 + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)} \right) = 0,$$

где

$$\Delta = d\rho_1 - d\rho_2 + (\Omega_{13} - \Omega_{23}) \frac{h_1 - h_2}{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)} (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - 1).$$

Неизвестных функций тоже две: H и Δ. Такие пары существуют с произволом двух функций одного аргумента.

Пусть у пары T_p конгруэнции пары являются нормалями. Такие пары определяются системой уравнений (I), к которой надо присоединить уравнения:

$$\rho_a \rho_a' \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) + (h_1 - h_2)^2 = 0.$$

Из этих уравнений независимо только одно, так как $\rho_1' = -\rho_2, \rho_2' = -\rho_1$. Тогда имеем одно уравнение

$$-\rho_1 \rho_2 \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) + (h_1 - h_2)^2 = 0. \qquad (3)$$

После дифференцирования этого уравнения и использования уравнений системы (I) имеем:

$$\rho_1 d\rho_2 + \rho_2 d\rho_1 = 2(H_1 - H_2) \frac{(h_1 - h_2)^2 (1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2))}{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}. \qquad (4)$$

При исследовании системы уравнений (I), (3), (4) получим три зависимых квадратичных уравнения, неизвестных функций – тоже три: $H_1, H_2, d\rho_1 - d\rho_2$. Пары T_p нормальных конгруэнций существуют с произволом трех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 4. Пары T_p нормальных конгруэнций имеют постоянное произведение абсцисс фокусов тогда и только тогда, когда постоянно расстояние между соответствующими прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если имеем пары T_p нормальных конгруэнций с постоянным произведением абсцисс соответствующих фокусов, то из уравнения (4) и равенства $\rho_1 \rho_1' = \rho_2 \rho_2' = const$ следует, что $H_1 = H_2$. Обратное следует из того же уравнения (4).

Пары T_p нормальных конгруэнций с постоянным произведением абсцисс фокусов существуют с произволом двух функций одного аргумента.

Т е о р е м а 5. Пары T_p нормальных конгруэнций с постоянным произведением абсцисс фокусов образованы нормалями фокальных поверхностей конгруэнций общих перпендикуляров.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 4 следует, что пары T_p нормальных конгруэнций с постоянным произведением абсцисс фокусов имеют постоянное расстояние между соответствующими прямыми. Из теоремы 2 имеем, что постоянен и угол между соответствующими прямыми. Наконец, из теоремы 3 следует, что пары T_p конгруэнций образованы нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Допустим теперь, что у пары T_p конгруэнций нормальными являются конгруэнции пары дополнительных конгруэнций $\{F_1 F_2\}$ и $\{F_1' F_2'\}$ и постоянно произведение абсцисс фокусов конгруэнций данной пары. К системе уравнений (I) надо присоединить уравнения:

$$\rho_1\rho_2 \sin^2(\alpha_1-\alpha_2) + (h_1-h_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2) = 0, \quad \rho_1\rho_2 = \rho_1'\rho_2' = \mathrm{const}. \qquad (5)$$

После дифференцирования уравнений (5) и использования уравнений системы (I) имеем уравнение

$$H_1 - H_2 = (A_1 - A_2)\frac{1+\cos^2(\alpha_1-\alpha_2)}{\cos(\alpha_1-\alpha_2)}. \qquad (6)$$

Такие пары определяются системой уравнений (I), (5), (6). Произвол существования таких пар конгруэнций - две функции одного аргумента.

Т е о р е м а 6. Пары T_p конгруэнций с нормальными дополнительными конгруэнциями и постоянным произведением абсцисс фокусов есть пары с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя в уравнение (6) выражения $H_\alpha = A_\alpha$ из системы уравнений (I), получим: $A_1 - A_2 = 0$. Следовательно, $H_1 - H_2 = 0$, откуда вытекает, что пара T_p конгруэнций есть пара $\widetilde{T}$ (с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми).

Т е о р е м а 7. Пары T_p конгруэнций с нормальными дополнительными конгруэнциями и постоянным произведением абсцисс фокусов образованы нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 6 следует, что рассматриваемые пары есть пары $\widetilde{T}$ конгруэнций. Так как $\rho_1\rho_2 = \mathrm{const}$, то из теоремы 2 [2, с.79] следует заключение теоремы.

Библиографический список

1. Р е д о з у б о в а О.С. Основы метрической теории пар T конгруэнций / МГПИ им.В.И.Ленина. Деп. в ВИНИТИ. № 2993. 1980.

2. Р е д о з у б о в а О.С. Пары T конгруэнций, соответствующие прямые которых проходят через фокусы прямых конгруэнции общих перпендикуляров // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1992. Вып.23. С.77-81.

3. Р е д о з у б о в а О.С. Пары T конгруэнций с данным расположением конгруэнции общих перпендикуляров // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. Вып.21. С.86-89.

УДК 514.77 ; 530.12

О ЗАМКНУТЫХ ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ

С.Е.С т е п а н о в

(Владимирский государственный педагогический университет)

Данная статья является продолжением работы автора [1]. В ней мы уточним ряд уже полученных результатов, а также укажем условия препятствия к некоторым локальным (3 + 1) - расщеплениям пространства-времени. Вдохновляющим моментом для нас послужила формулировка ставшей уже классической теоремы С.Хокинга [2, с.164], которая выражает условия препятствия к локальному (3 + 1) - расщеплению пространства-времени с замкнутыми, т.е. компактными без границ, пространственноподобными гиперповерхностями.

1. Пусть M - четырехмерное многообразие с метрикой g лоренцевой сигнатуры (- + + +), ориентируемое и ориентируемое во времени. Рассмотрим в M область U, границей которой служит замкнутая пространственноподобная гиперповерхность H. Зададим на H направленное в будущее времениподобное единичное векторное поле n. Тогда произвольное векторное поле X многообразия M в точках H можно разложить $X = X_\perp + X_\parallel$ на касательную $X_\perp = X + g(X,n)n$ и нормальную $X_\parallel = -g(X,n)n$ составляющие. И если Ω - метрическая форма объема M, то вдоль H будем иметь $\Omega(X) = -g(X,n)\overline{\Omega}$. Здесь $\overline{\Omega}$ - форма объема H, определяемая из равенства $\overline{\Omega}(A,B,C) = \Omega(n,A,B,C)$ для любых локальных линейно независимых векторных полей A, B и C, касательных H. В этом случае теореме Гаусса [3, с.193], [4, с.183-184] можно придать следующий вид: