УДК 514.764.2

И. А. Гордеева, С. Е. Степанов

(*Владимирский государственный педагогический университет, Финансовая академия при Правительстве РФ, г. Москва*)

НУЛИ ПСЕВДОКИЛЛИНГОВА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

В монографии [1] и статье [2] были доказаны «теоремы исчезновения» для псевдокиллинговых векторных полей на компактном ориентированном римановом многообразии с несимметрической метрической связностью. Доказываемые в статье теоремы, могут служить обобщением этих результатов на некомпактный случай.

§1. Функция длины псевдокиллингова векторного поля

1.2. Многообразием Эйнштейна — Картана называется (см. [3]) триплет $\left(M, g, \overline{\nabla}\right)$, где M — гладкое класса C^∞ многообразие размерности $n \geq 2$, g — риманова метрика и $\overline{\nabla}$ — несимметрическая метрическая связность, т. е. линейная связность с ненулевым тензором кручения $S \in C^\infty\left(\Lambda^2 M \otimes TM\right)$ такая, что $\overline{\nabla} g = 0$.

Тензор кривизны $\overline{R}$ несимметричной метрической связности $\overline{\nabla}$ обладает следующими свойствами симметрии (см. [1, с. 79]):

$$\overline{R}(X,Y,Z,V) = -\overline{R}(Y,X,Z,V),\ \overline{R}(X,Y,Z,V) = -\overline{R}(Y,X,Z,V),$$

а потому $\overline{R}$ является сечением тензорного расслоения $\Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M$, и при этом он не удовлетворяет известным тождествам Бианки, которым подчиняется тензор кривизны R связности Леви-Чивита ∇ метрики g. Тензор Риччи $\overline{r}$ связности $\overline{\nabla}$ в отличие от тензора Риччи r связности Леви-Чивита ∇ метрики g не симметричен.

Определим секционную кривизну $\overline{K}$ многообразия Римана — Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ в направлении 2-мерного подпространства π касательного пространства многообразия точке $x_0 \in M$ посредством следующего равенства $\overline{K}(X_0 \wedge Y_0) = \overline{R}(X_0, Y_0, X_0, Y_0)$ для ортонормированного базиса $\{X_0, Y_0\}$ подпространства π.

Кривизну Риччи $\overline{Ric}$ определим равенством $\overline{\mathrm{Ric}}(\mathrm{X}_0) = = \mathrm{r}(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_0)$.

1.2. Векторное поле ξ на многообразии Римана — Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ называется (см. [1, с. 86]) псевдокиллинговым, если поле подчиняется следующему уравнению

$$g(\overline{\nabla}_X \xi, Y) + g(\overline{\nabla}_Y \xi, X) = 0 \tag{1.1}$$

для произвольных векторных полей $X, Y \in C^\infty TM$, которое означает, что в каждой точке $x \in M$ оператор $\overline{\nabla}\xi$ является кососимметричным относительно скалярного произведения $g_x = \langle\ ,\ \rangle$ касательного пространства $T_x M$.

Введем функцию $f : M \to \mathbf{R}$ длины векторного поля $\xi \in C^\infty TM$ равенством $f(x) := 2^{-1} g(\xi_x, \xi_x)$ для произвольной точки $x \in M$. Справедлива

Лемма. *Пусть ξ псевдокиллинговое векторное поле на многообразии Римана — Картана $(M, g, \overline{\nabla})$. Тогда функция длины $f = 2^{-1} g(\xi, \xi)$ векторного поля ξ удовлетворяет дифференциальным уравнениям:*

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}^2 f)(X, X) = 2^{-1} g(\overline{\nabla}_X \xi, \overline{\nabla}_X \xi) - \\ - \overline{R}(\xi, X, \xi, X) + g(\overline{S}(X, \xi), \overline{\nabla}_X \xi);\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\Delta f = g\left(\overline{\nabla}\xi, \overline{\nabla}\xi\right) - \bar{r}(\xi,\xi) + 2\sum_{i=1}^{n} g\left(\overline{S}(\xi, V_i), \overline{\nabla}_{V_i}\xi\right) \quad (1.3)$$

для любых векторного поля X и локального ортонормированного базиса $V_1, V_2, ..., V_n$ *векторных полей на* $\left(M, g, \overline{\nabla}\right)$.

Доказательство. В локальных координатах $x^1, ..., x^n$ карты (U,φ) имеем $f = 2^{-1}g_{ik}\xi^i\xi^k = 2^{-1}\xi_k\xi^k$ и далее

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_i\overline{\nabla}_j f = \overline{\nabla}_i\left(\xi^k\overline{\nabla}_j\xi_k\right) = \left(\overline{\nabla}_i\xi^k\right)\left(\overline{\nabla}_j\xi_k\right) + \xi^k\overline{\nabla}_i\overline{\nabla}_j\xi_k = \\ = \left(\overline{\nabla}_i\xi^k\right)\left(\overline{\nabla}_j\xi_k\right) - \xi^k\overline{\nabla}_i\overline{\nabla}_k\xi_j = \left(\overline{\nabla}_i\xi^k\right)\left(\overline{\nabla}_j\xi_k\right) - \\ - \overline{R}_{ikjl}\xi^k\xi^l + 2\overline{S}_{ikl}\xi^k\overline{\nabla}_j\xi^l - \xi^k\overline{\nabla}_k\overline{\nabla}_i\xi_j. \quad (1.4)\end{aligned}$$

Из (1.4) с очевидностью следует равенство (1.2). Также из (1.4) находим выражение для лапласиана $\Delta f = g^{ij}\overline{\nabla}_i\overline{\nabla}_j f$.

1.3. В заключение параграфа заметим, что для произвольной дважды дифференцируемой функции $f: M \to \mathbf{R}$ в локальной системе координат $x^1, x^2, ..., x^n$ карты (U,φ) имеем $\overline{\nabla}_j f = \dfrac{\partial f}{\partial x^j}$; $\overline{\nabla}_i\overline{\nabla}_j f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \dfrac{\partial f}{\partial x^k}\overline{\Gamma}^k_{ij}$ для коэффициентов $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ связности $\overline{\nabla}$. А потому в критической точке $x_0 \in M$ функции f выполняются равенства:

$$\overline{\nabla}_j f = 0;\ \overline{\nabla}_i\overline{\nabla}_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j};\ \Delta f = g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

§2. Нули псевдокиллингова векторного поля

2.1. Рассмотрим псевдокиллиноговое векторное поле на многообразии Римана — Картана $\left(M, g, \overline{\nabla}\right)$ четной размерности. Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $(M, g, \overline{\nabla})$ *— многообразие Римана — Картана четной размерности. Если функция длины* $f = 2^{-1} g(\xi, \xi)$ *псевдокиллингова векторного поля* ξ *имеет локальный максимум (минимум) в некоторой точке многообразия и секционная кривизна* $\overline{K}$ *в этой точке строго отрицательная (положительная), то поле* ξ *обращается в нуль в этой точке.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$ — критическая точка функции $f = 2^{-1} g(\xi, \xi)$ длины псевдокиллингова векторного поля ξ, тогда для каждого векторного поля Y в этой точке имеем $0 = Y(f) = g(\overline{\nabla}_Y \xi, \xi) = -g(\overline{\nabla}_\xi \xi, Y)$, что является следствием кососимметричности оператора $\overline{\nabla}\xi$. Последнее означает, что в точке $x_0 \in M$ вектор ξ_0 принадлежит ядру оператора $\overline{\nabla}\xi$. Поскольку ранг оператора $\overline{\nabla}\xi$ четный, то в касательном пространстве в точке $x_0 \in M$ наряду с вектором ξ_0 существует еще один неколлинеарный ξ_0 вектор $X_{0,}$ который также принадлежит ядру этого оператора, т.е. $\overline{\nabla}_{X_0} \xi = 0$. Этот вектор без ограничения общности можно считать ортогональным ξ_0.

Если $x_0 \in M$ является точкой максимума функции $f = 2^{-1} g(\xi, \xi)$, то из формулы (1.2) выводим

$$0 \le (\mathrm{Hess}\, f)(X_0, X_0) = -\overline{R}(X_0, \xi_0, X_0, \xi_0) =$$
$$= -f(x_0) g(X_0, X_0) \overline{K}(X_0 \wedge \xi_0).$$

Если секционная кривизна положительная, то из последнего неравенства последует, что $f(x_0) = 0$. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Замечание. Если $f = 2^{-1} g(\xi, \xi)$ имеет в точке $x_0 \in M$ локальный максимум, то $0 = f(x_0) \geq f(x)$ в некоторой окрестности этой точки. Поэтому ξ будет обращаться в нуль не только в точке $x_0 \in M$, но и в этой ее окрестности.

Следствие. *Если $(M, g, \overline{\nabla})$ — компактное многообразие Римана — Картана четной размерности со строго положительной (отрицательной) секционной кривизной, то каждое псевдокиллинговое векторное поле имеет нулевую точку на M.*

Теорема 2. *Пусть $(M, g, \overline{\nabla})$ — многообразие Римана — Картана с полусимметрической метрической связностью $\overline{\nabla}$. Если функция длины $f = 2^{-1} g(\xi, \xi)$ псевдокиллингова векторного поля ξ имеет локальный максимум в некоторой точке многообразия, где квадратичная форма $\overline{Ric}(X, X)$ отрицательно определена, то поле ξ обращается в нуль в этой точке и некоторой ее окрестности.*

Доказательство. Для полусимметрической связности $\overline{\nabla}$ (см. [5, с. 85]) тензор кручения $\overline{S}_{ijk} = \frac{1}{n-1}\left(g_{ik}\overline{S}_j - g_{jk}\overline{S}_i\right)$, а в результате $\Delta f = \left\|\overline{\nabla}\xi\right\|^2 - \overline{Ric}(\xi, \xi) + \frac{2}{n-1} g\left(\overline{\nabla} f, \operatorname{trace}\overline{S}\right)$. Пусть теперь функция длины $f = 2^{-1} g(\xi, \xi)$ псевдокиллингова векторного поля ξ имеет локальный максимум в точке x_0 многообразия $(M, g, \overline{\nabla})$, тогда в этой точке $\overline{\nabla} f = 0$ и $\Delta f \leq 0$. С другой стороны, в силу предположения об отрицательной определенности квадратичной формы $\overline{Ric}(X, X)$ из полученной для Δf формулы следует, что $(\Delta f)(x_0) > 0$, если $\xi_0 \neq 0$. Поэтому поле ξ должно обратиться в нуль в точке x_0. Более того, поскольку $f = 2^{-1}g(\xi,\xi)$ имеет в точке $x_0 \in M$ локальный максимум, то ξ будет обращаться в нуль не только в этой точке, но и некоторой ее окрестности.

Следствие. *Пусть* $(M, g, \overline{\nabla})$ *— многообразие Римана — Картана с антисимметричным тензором кручения* $\overline{S}$. *Если функция длины* $f = 2^{-1}g(\xi,\xi)$ *псевдокиллингова векторного поля* ξ *имеет локальный максимум в точке многообразия, где квадратичная форма* $\overline{Ric}(X, X)$ *отрицательно определена, то поле* ξ *обращается в нуль на всем многообразии.*

Доказательство. В предположениях следствия на основе теоремы 2 заключаем, что ξ будет обращается в нуль в точке максимума функции $f = 2^{-1}g(\xi,\xi)$ и некоторой ее окрестности. Пусть далее тензор кручения $\overline{S}$ является антисимметричным (см. [5, с. 86]), т.е. подчиняется условию $g(\overline{S}(X,Y),Z) + g(\overline{S}(X,Z),Y) = 0$ для любых векторных полей $X, Y, Z \in C^\infty TM$. Вследствие этого

$$0 = g(\overline{\nabla}_X\xi, Y) + g(\overline{\nabla}_Y\xi, X) = g(\nabla_X\xi, Y) + g(\nabla_Y\xi, X),$$

а потому псевдокиллинговое векторное поле ξ является киллинговым векторным полем или, что то же самое, инфинитезимальной изометрией риманова многообразия (M, g). В этом случае утверждение об обращении в нуль ξ на всем многообразии *M* будет следствием теоремы 4.1 монографии [4, с. 80]).

Список литературы

1. *Яно К., Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти. М., 1957.

2. *Goldberg S.I.* On pseudo-harmonic and pseudo-Killing vector in metric manifolds with torsion // The Annals of Math. 1957. Vol. 64, № 2. P. 364—373.

3. *Trautman A.* The Einstein — Cartan theory // Encyclopedia of Mathematical Physics / ed. by Francoise J.-P. et al. Oxford: Elsevier. 2006. Vol. 2. P. 189—195.

4. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

5. *Схоутен И. С., Стройк Д. Дж.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.; Л., 1939.

I. Gordeeva, S. Stepanov

ZEROS OF PSEUDO-KILLING VECTOR FIELD

Let X be a pseudo-Killing vector field in a metric manifold with torsion (M, g, ∇) (see Yano K., Bochner S. Curvature and Betti numbers — Princeton, New Jersey: Princeton university Press, 1953). If x_0 is a local maximum of $f = \frac{1}{2} g(X, X)$ and the Ricci tensor of (M, g, ∇) at x_0 is negative define, then there exists necessarily a neighborhood of this point on which X vanishes. If (in addition) the torsion tensor S of ∇ has the following property $g(S(V,Y),Z) + g(S(V,Z),Y) = 0$ then X vanishes identically on (M, g, ∇).

УДК 514.7

И. А. Долгарев

(Пензенский государственный университет)

ПОВЕРХНОСТИ С ПОСТОЯННОЙ ГАЛИЛЕЕВОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Установлено, что всякая постоянная галилеева связность является нулевой. Изометричные поверхности 3-мерного пространства-времени Галилея, имеющие постоянные коэффициенты квадратичных форм, есть галилеевы плоскости, круговые цилиндры и прямые геликоиды.

Рассматриваются регулярные класса C^3 поверхности в 3-мерном пространстве-времени Галилея Γ^3 в естественной параметризации