11. *Столяров А.В.* Внутренняя геометрия нормализованного конформного пространства // Изв. вузов. Математика. 2002. №11. С. 61 – 70.
12. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Conformal differential geometry and its generalizations. USA, 1996.

A. Stolyarov

THE INTERIOR GEOMETRY OF FLAT NETS
IN A CONFORMAL SPACE

In the work the geometry of a flat nets given in a conformal space is investigated; also the interior geometry of the orthogonal Chebyishev′s and geodesic nets and *n*-conjugated systems is studied in detail.

УДК 514.75

О.М. Хрусталева
(Калининградский государственный университет)

О ВЫРОЖДЕННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНЕСЕНИЯХ В СВЯЗНОСТЯХ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ОСНАЩЕНИЕМ БОРТОЛОТТИ СЕМЕЙСТВА ПЛОСКОСТЕЙ

Рассмотрено оснащение Бортолотти семейства плоскостей в проективном пространстве. Приведены три типа групповой связности, индуцированной этим оснащением. Описаны параллельные перенесения в связностях трех типов, которые оказались свободно и связанно вырожденными.

В проективном пространстве P_n исследуется r-мерное семейство B_r $(1 \le r < (m+1)(n-m))$ m-мерных плоскостей L_m $(1 \le m < n)$ [1]. Произведена специализация подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$, при которой вершины A, A_a помещены на плоскость L_m, причем индексы принимают значения: $a, b, c = \overline{1, m}$;

$\alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n}$. Система уравнений семейства B_r в параметрической форме имеет вид:

$$\omega^{\alpha}=\Lambda_{i}^{\alpha}\theta^{i},\quad \omega_{a}^{\alpha}=\Lambda_{ai}^{\alpha}\theta^{i}. \tag{1}$$

Базисные формы θ^i, заданные в некоторой области r-мерного пространства параметров S_r, удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\theta^{i}=\theta^{j}\wedge\theta_{j}^{i}\quad \left(i,j,k=\overline{n+1,n+r}\right). \tag{2}$$

С семейством B_r ассоциируется главное расслоение $G(B_r)$. Базой главного расслоения $G(B_r)$ служит семейство B_r, а типовым слоем – подгруппа стационарности G (dim $G=n^2-nm+m^2+n+m$) плоскости L_m. Расслоение $G(B_r)$ содержит подрасслоение проективных реперов с той же базой, типовым слоем которого является проективная факторгруппа GP(m), действующая на плоскости L_m. Групповая связность в главном расслоении $G(B_r)$ задана объектом связности $\Gamma=\left\{\Gamma_{ai},\Gamma_{bi}^{a},\Gamma_{i}^{a},\Gamma_{\beta i}^{\alpha},\Gamma_{\alpha i}^{a},\Gamma_{\alpha i}\right\}$, причем формы связности имеют вид:

$$\begin{aligned}&\tilde\omega_{a}=\omega_{a}-\Gamma_{ai}\theta^{i},\quad \tilde\omega_{b}^{a}=\omega_{b}^{a}-\Gamma_{bi}^{a}\theta^{i},\quad \tilde\omega_{a}=\omega_{a}-\Gamma_{ai}\theta^{i},\\&\tilde\omega_{\beta}^{\alpha}=\omega_{\beta}^{\alpha}-\Gamma_{\beta i}^{\alpha}\theta^{i},\quad \tilde\omega_{\alpha}^{a}=\omega_{\alpha}^{a}-\Gamma_{\alpha i}^{a}\theta^{i},\quad \tilde\omega_{\alpha}=\omega_{\alpha}-\Gamma_{\alpha i}\theta^{i}.\end{aligned} \tag{3}$$

Произведено оснащение Бортолотти конгруэнции плоскостей [1]. Оснащающая плоскость P_{n-m-1} определена совокупностью точек $B_\alpha=A_\alpha+\lambda_{\alpha}^{a}A_{a}+\lambda_{\alpha}A$. Ковариантные дифференциалы $\nabla\lambda_{\alpha}^{a}$, $\nabla\lambda_{\alpha}$ компонент оснащающего квазитензора $\lambda=\{\lambda_{\alpha}^{a},\lambda_{\alpha}\}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}&\nabla\lambda_{\alpha}^{a}=d\lambda_{\alpha}^{a}-\lambda_{\beta}^{a}\tilde\omega_{\alpha}^{\beta}+\lambda_{\alpha}^{b}\tilde\omega_{b}^{a}+\lambda_{\alpha}\tilde\omega^{a}+\tilde\omega_{\alpha}^{a},\\&\nabla\lambda_{\alpha}=d\lambda_{\alpha}-\lambda_{\beta}\tilde\omega_{\alpha}^{\beta}+\lambda_{\alpha}^{a}\tilde\omega_{a}+\tilde\omega_{\alpha}\end{aligned}. \tag{4}$$

Ранее [1] было доказано, что оснащение Бортолотти конгруэнции плоскостей индуцирует два типа групповой связности с объектами $\overset{1}{\Gamma}$ и $\overset{2}{\Gamma}$ в ассоциированном расслоении $G(B_r)$.

В первом случае компоненты объекта связности $\overset{1}{\Gamma} = \left\{ \overset{0}{\Gamma}{}^a_i, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}{}_{ai}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{1}{\Gamma}{}_{\alpha i} \right\}$ охватываются посредством оснащающего квазитензора $\lambda = \{\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha\}$ и фундаментального объекта первого порядка $\Lambda = \left\{\Lambda^\alpha_i, \Lambda^\alpha_{ai}\right\}$ семейства B_r по формулам [2]:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^a_i = \lambda^a_\alpha \Lambda^\alpha_i, \quad \overset{0}{\Gamma}{}_{ai} = \lambda_\alpha \Lambda^\alpha_{ai}, \quad \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi} = \lambda^a_\alpha \Lambda^\alpha_{bi} - \delta^a_b \Lambda^\alpha_i \lambda_\alpha,$$
$$\overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i} = -\Lambda^\alpha_{ai} \lambda^a_\beta - \Lambda^\gamma_i \left(\delta^\alpha_\beta \lambda_\gamma + \delta^\alpha_\gamma \lambda_\beta \right), \tag{5}$$

$$\overset{1}{\Gamma}{}_{\alpha i} = -\lambda_\beta M^\beta_{\alpha i}, \quad \overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha i} = -\lambda^a_\beta M^\beta_{\alpha i}, \; M^\beta_{\alpha i} = \lambda^a_\alpha \Lambda^\beta_{ai} + \lambda_\alpha \Lambda^\beta_i. \tag{6}$$

Во втором случае компоненты объекта связности $\overset{2}{\Gamma} = \left\{ \overset{0}{\Gamma}{}^a_i, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}{}_{ai}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{2}{\Gamma}{}_{\alpha i} \right\}$ охватываются с помощью компонент оснащающего квазитензора λ и их пфаффовых производных по формулам (5) и следующим [1]:

$$\overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i} = \lambda^a_{\alpha i} + \lambda^a_\beta \overset{0}{\Gamma}{}^\beta_{\alpha i} - \lambda^b_\alpha \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi} - \lambda_\alpha \overset{0}{\Gamma}{}^a_i, \; \overset{2}{\Gamma}{}_{\alpha i} = \lambda_{\alpha i} + \lambda_\beta \overset{0}{\Gamma}{}^\beta_{\alpha i} - \lambda^a_\alpha \overset{0}{\Gamma}{}_{ai}. \tag{7}$$

Третий тип связности с объектом $\overset{3}{\Gamma} = \left\{ \overset{0}{\Gamma}{}^a_i, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}{}_{ai}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{3}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{3}{\Gamma}{}_{\alpha i} \right\}$ может быть получен путем охвата компонент $\Gamma^a_{\alpha i}$ и $\Gamma_{\alpha i}$ только с использованием пфаффовых производных компонент оснащающего квазитензора. А именно: функции $\Gamma^a_{\alpha i}$ и $\Gamma_{\alpha i}$ охватываются следующим образом:

$$\overset{3}{\Gamma}{}^a_{\alpha i} = -\lambda^a_{\alpha i}, \; \overset{3}{\Gamma}{}_{\alpha i} = -\lambda_{\alpha i}. \tag{8}$$

Замечание 1. Связность 1-го типа является средним арифметическим связностей 2-го и 3-го типов: $\overset{1}{\Gamma} = \frac{1}{2}(\overset{2}{\Gamma} + \overset{3}{\Gamma})$.

Опишем параллельные перенесения оснащающей плоскости P_{n-m-1} в связностях трех типов. Рассмотрим дифференциалы точек B_α, задающих плоскость P_{n-m-1},

$$dB_\alpha = \theta B_\alpha + (\omega_\alpha^\beta + M_{\alpha i}^\beta \theta^i)B_\beta + (d\lambda_\alpha - \lambda_\beta \omega_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^a \omega_a + \omega_\alpha - \lambda_\beta M_{\alpha i}^\beta \theta^i)A +$$
$$+ (d\lambda_\alpha^a - \lambda_\beta^a \omega_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^b \omega_b^a + \lambda_\alpha \omega^a + \omega_\alpha^a - \lambda_\beta^a M_{\alpha i}^\beta \theta^i)A_a.$$

Подставим выражения $d\lambda_\alpha^a$ и $d\lambda_\alpha$ через ковариантные дифференциалы $\nabla\lambda_\alpha^a$ и $\nabla\lambda_\alpha$ из формул (4) и формы связности (3), в результате получим

$$dB_\alpha = (...)_\alpha^\beta B_\beta + (\nabla\lambda_\alpha + (\lambda_\alpha^a \Gamma_{ai} - \lambda_\beta \Gamma_{\alpha i}^\beta + \Gamma_{\alpha i} - \lambda_\beta M_{\alpha i}^\beta)\theta^i)A +$$
$$+ (\nabla\lambda_\alpha^a + (\lambda_\alpha^b \Gamma_{bi}^a + \lambda_\alpha \Gamma_i^a - \lambda_\beta^a \Gamma_{\alpha i}^\beta + \Gamma_{\alpha i}^a - \lambda_\beta^a M_{\alpha i}^\beta)\theta^i)A_a.$$

Из этого выражения следует, что при $\nabla\lambda_\alpha^a$=0 и $\nabla\lambda_\alpha$=0 специальных смещений плоскости P_{n-m-1} не выделяется. Значит, произвольное смещение плоскости P_{n-m-1} будет одновременно являться ее параллельным перенесением, т. е. параллельное перенесение – свободно вырожденно [3]. При этом исключается случай обращения в нуль выражений при базисных формах θ^i, т. е. когда

$$\Gamma_{\alpha i} = -\lambda_\alpha^a \Gamma_{ai} + \lambda_\beta(\Gamma_{\alpha i}^\beta + M_{\alpha i}^\beta),\ \Gamma_{\alpha i}^a = -\lambda_\alpha^b \Gamma_{bi}^a - \lambda_\alpha \Gamma_i^a + \lambda_\beta^a(\Gamma_{\alpha i}^\beta + M_{\alpha i}^\beta).$$

Подставив в эти выражения формулы (5) охвата компонент объекта связности 1-го типа, получим выражения $\Gamma_{\alpha i} = -\lambda_\beta M_{\alpha i}^\beta,\ \Gamma_{\alpha i}^a = -\lambda_\beta^a M_{\alpha i}^\beta$, соответствующие формулам (6) того же типа связности. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *В групповой связности Г, не являющейся связностью 1-го типа, параллельное перенесение оснащающей плоскости P_{n-m-1} будет свободно вырожденным.*

Исследуем параллельное перенесение оснащающей плоскости в связности 1-го типа. Записывая дифференциалы точек B_α с помощью объекта связности $\overset{1}{\Gamma}$, компоненты которого удовлетворяют формулам (5, 6), получим

$$dB_\alpha = (...)^\beta_\alpha B_\beta + \overset{1}{\nabla} \lambda^a_\alpha A_a + \overset{1}{\nabla} \lambda_\alpha A.$$

Номер над символом оператора ковариантного дифференцирования обозначает действие этого оператора в связности соответствующего типа. Обращая ковариантные дифференциалы в нуль, получим, что оснащающая плоскость будет неподвижной. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *В групповой связности 1-го типа параллельное перенесение оснащающей плоскости P_{n-m-1} будет связанно вырожденным.*

Аналогично находим дифференциалы точек B_α с помощью объекта связности $\overset{2}{\Gamma}$, компоненты которого удовлетворяют формулам (5, 7):

$$dB_\alpha = (...)^\beta_\alpha B_\beta + (\overset{2}{\nabla} \lambda_\alpha + (\lambda_{\alpha i} - \lambda_\beta M^\beta_{\alpha i})\theta^i)A + (\overset{2}{\nabla} \lambda^a_\alpha + (\lambda^a_{\alpha i} - \lambda^a_\beta M^\beta_{\alpha i})\theta^i)A_a.$$

Из этого выражения с учетом формул [1], задающих специальное оснащение Бортолотти, вытекает

Теорема 3. *При специальном оснащении параллельное перенесение оснащающей плоскости P_{n-m-1} в связности 2-го типа будет таким же, как в связности 1-го типа, т. е. связанно вырожденным.*

Теорема 4. *При неспециальном оснащении параллельное перенесение оснащающей плоскости P_{n-m-1} в связности 2-го типа будет свободно вырожденным.*

Теорема 5. *В связности 3-го типа параллельное перенесение оснащающей плоскости P_{n-m-1} свободно вырожденно.*

Действительно, дифференциалы точек B_α в этой связности имеют вид:

$$dB_\alpha = (...)^\beta_\alpha B_\beta + (\overset{3}{\nabla} \lambda^a_\alpha - \lambda^a_{\alpha i}\theta^i)A_a + (\overset{3}{\nabla} \lambda_\alpha - \lambda_{\alpha i}\theta^i)A.$$

Список литературы

1. *Жовтенко О.М.* Индуцированные групповые связности семейства плоскостей в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2001. Вып. 32. С. 43 – 47.
2. *Шевченко Ю.И.* Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // Там же. 1978. Вып. 9. С. 124 – 133.
3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономного и неголономного гладких многообразий. Калининград, 1998.

O. Khrustaleva

ON DEGENERATE PARALLEL DISPLACEMENTS IN THE CONNECTIONS, INDUCED BOTOLOTTI′S EQUIPMENT OF THE FAMILY OF PLANES

Botolotti′s equipment of the family of planes in the projective space is considered. The coinsidence conditions induced group connection of three types are found. Parallel displacements in the connections of three types are described. They are freely and connectly degenerate.

УДК 514.75

Д.С. Чернов
(Калининградский государственный университет)

ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ НА НОРМАЛЬНО ЦЕНТРИРОВАННОЙ ТАНГЕНЦИАЛЬНО ВЫРОЖДЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В N-мерном проективном пространстве P_N рассмотрена нормально центрированная тангенциально вырожденная поверхность $S^*_{n,m}$, т.е. тангенциально