V. Kalnitsky

THE COMPLETENESS OF NILPOTENT FIELDS

The notion of geometrical homogeneity turned out to be fruitful in the sense of simplification in the Nonlinear Control System Theory and the Theory of Stability. Using this notion and the Palais theorem we extended the Kobayashi theorem and some earlier result of the author on the geodesic flow polynomial symmetries of high orders.

УДК 514.75

М.В. Кретов

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

КОМПЛЕКСЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются комплексы (трехпараметрические семейства) Z_3 эллиптических цилиндров со специальными свойствами ассоциированных образов. Геометрически охарактеризованы характеристические и фокальные многообразия образующих элементов изучаемых комплексов. Получены геометрические свойства многообразий, дающие возможность в дальнейшем сконструировать их.

Рассмотрим в трехмерном аффинном пространстве комплекс (трехпараметрическое семейство) Z_3 эллиптических цилиндров q. Отнесем комплекс к реперу $r=\{A,\bar{e}_i\}$, $i,j,k=\overline{1,3}$, где A − центр луча прямолинейной конгруэнции Z_2 осей цилиндра; $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ лежат в касательной плоскости S к поверхности центров и сопряжены между собой; концы $A_I\left(I,J,K=\overline{1,2}\right)$ последних векторов принадлежат эллипсу — сечению цилиндра касательной плоскостью S; вектор $\bar{e}_3$ направлен по оси цилиндра, конец A_3 которого совпадает с фокусом луча прямолинейной конгруэнции Z_2.

Уравнение цилиндра q запишется в виде

$$F\equiv\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2-1=0\,.\ (1)$$

Дифференцируя уравнение (1) с учетом уравнений стационарности точки $dx^i=-x^k\omega_k^i-\omega^i$, получим

$$dF=-2\left(x^1\right)^2\omega_1^1-2x^1x^2\left(\omega_1^2+\omega_2^1\right)-2x^1x^3\omega_3^1-2x^2x^3\omega_3^2-$$
$$-2\left(x^2\right)^2\omega_2^2-2x^1\omega^1-2x^2\omega^2,$$

следовательно, формы Пфаффа $\omega_1^1,\ \omega_1^2+\omega_2^1,\ \omega_3^1,\ \omega_3^2,\ \omega_2^2,\ \omega^1,$ ω^2 можно взять за структурные формы цилиндра q. Рассмотрим трехпараметрическое семейство цилиндров, выбрав за базис $\theta^I=\omega_3^I$, $\theta^3=\omega_1^2+\omega_2^1$. Тогда система уравнений Пфаффа комплекса Z_3 запишется в виде

$$\omega_I^I=A_{Ii}^I\theta^i,\ \omega^I=A_i^I\theta^i\,. \qquad (2)$$

Согласно выбору канонического репера $\omega^3=0$. Замыкая последнее уравнение и используя лемму Картана, получим

$$\omega_1^3=\lambda_{11}\omega^1+\lambda_{12}\omega^2\,,\ \omega_2^3=\lambda_{12}\omega^1+\lambda_{22}\omega^2\,. \qquad (3)$$

Так как луч $\left(A,\bar{e}_3\right)$ стоит на месте при $\omega^1=0$, $\omega^2=0$ и при $\theta^1=0$, $\theta^2=0$, то согласно работе [1]

$$\omega^I=A_J^I\theta^J\,. \qquad (4)$$

Фокусы луча $\left(A,\bar{e}_3\right)$ имеют вид $\widetilde{F}=A+t\bar{e}_3$, значит,

$$d\widetilde{F}=\left(A_1^1\theta^1+A_2^1\theta^2+t\theta^1\right)\bar{e}_1+\left(A_1^2\theta^1+A_2^2\theta^2+t\theta^2\right)\bar{e}_2+\left(dt+t\omega_3^3\right)\bar{e}_3\,.$$

Последний дифференциал должен быть параллелен вектору $\bar{e}_3$, поэтому

$$t^2 + \left(A_1^1 + A_2^2\right)t + A_1^1 A_2^2 - A_1^2 A_2^1 = 0\,. \qquad (5)$$

Вершина репера A помещена в центр луча $\left(A,\bar{e}_3\right)$, а конец вектора $\bar{e}_3$ совпадает с его фокусом, следовательно,

$$A_1^1 + A_2^2 = 0\,,\ A_1^1 A_2^2 - A_1^2 A_2^1 + 1 = 0\,. \qquad (6)$$

Уравнение торса прямолинейной конгруэнции Z_2 имеет вид

$$A_1^2\left(\theta^1\right)^2 + \left(A_2^2 - A_1^1\right)\theta^1\theta^2 - A_2^1\left(\theta^2\right)^2 = 0\,. \qquad (7)$$

Комплексы Z_3, для которых индикатриса вектора $\bar{e}_2$ описывает линию с касательной, параллельной вектору $\bar{e}_1$, а индикатриса вектора $\bar{e}_3$ описывает поверхность с касательной плоскостью, параллельной координатной плоскости $\left(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2\right)$; точка A_1 принадлежит характеристическому многообразию [2] цилиндра q, описывающего рассматриваемые комплексы; вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной к линии на поверхности (A), высекаемой торсом прямолинейной конгруэнции Z_2, будем называть комплексами Z_3^{ε}. Для этих комплексов $A_2^1 = 0$. Из соотношений (6) следует, что $A_1^1 = \varepsilon$, $A_2^2 = -\varepsilon$ $(\varepsilon = \pm 1)$. Так как $d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j$, то

$$\omega_2^2 = 0\,,\ \omega_2^3 = 0\,,\ \omega_3^3 = 0\,. \qquad (8)$$

Характеристическое многообразие цилиндра q задается системой уравнений

$$F_1 = 0\,,\ F_2 = 0\,,\ F_3 = 0\,, \qquad (9)$$

где F_k удовлетворяют уравнению $-\dfrac{1}{2}dF = F_k\theta^k$.

Из системы уравнений (9) следует, что $A_{11}^1 = -\varepsilon$, $A_{12}^1 = A_{13}^1 = 0$.

Система дифференциальных уравнений комплекса Z_3 принимает вид

$$\omega_1^1 = -\varepsilon\theta^1,\ \omega_1^3 = \lambda_{11}\omega^1 + \lambda_{12}\omega^2,\ \omega^1 = \varepsilon\theta^1,\ \omega^2 = A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2,$$
$$\omega_2^2 = \omega_2^3 = \omega_3^3 = \omega^3 = 0. \qquad (10)$$

Продолжая замыкать уравнения последней системы уравнений, получим $\lambda_{12} = 0$, $\omega_2^1 = 0$. Тогда система (10) в окончательной форме будет выглядеть следующим образом:

$$\omega_1^1 = -\varepsilon\theta^1,\ \omega_1^3 = \varepsilon\lambda_{11}\theta^1,\ \omega^1 = \varepsilon\theta^1,\ \omega^2 = A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2,$$
$$\omega_2^3 = \omega_2^1 = \omega_3^3 = \omega_2^2 = \omega^3 = 0, \qquad (11)$$

где $\theta^1 = \omega_3^1$, $\theta^2 = \omega_3^2$, $\theta^3 = \omega_1^2$.

Анализируя систему дифференциальных уравнений (11) в соответствии с методикой, указанной в работе [3], убеждаемся в том, что комплексы Z_3^ε существуют и определяются с произволом двух функций одной переменной. Доказательство этого факта было проверено на компьютере с помощью программы, составленной Н.В. Малаховским, алгоритм которой опубликован им в настоящем сборнике.

Обозначим через M_i и M_{3+i} текущие точки координатных прямых $(A,\bar{e}_i)$ и координатных плоскостей $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$, $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_3)$, $(A,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ соответственно; через l − прямую в координатной плоскости $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_3)$, проходящую через концы векторов $\bar{e}_1$ и $-\varepsilon\bar{e}_3$; через P — точку, являющуюся концом вектора $-\bar{e}_1 - 2\varepsilon\bar{e}_3$.

С использованием введенных обозначений доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Характеристическое многообразие квадрики q, описывающей комплекс Z_3^ε, состоит из двух пересекающихся прямых — $(A,\bar{e}_3)$ и l.*

Теорема 2. *Фокальное многообразие [2] квадрики q, описывающей комплекс Z_3^ε, состоит только из двух точек A_1 и P, лежащих на прямой l.*

Теорема 3. *Комплексы* Z_3^{ε} *обладают следующими геометрическими свойствами:*

1) индикатриса вектора $\bar{e}_2$ *неподвижна;*

2) индикатриса вектора $\bar{e}_3$*, точки* A*,* A_I*,* M_2 *описывают цилиндрические поверхности с образующей, параллельной вектору* $\bar{e}_2$*;*

3) точка A_3 *при* $\varepsilon = 1$ *описывает цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной вектору* $\bar{e}_2$*, а при* $\varepsilon = -1$ *описывает плоскость;*

4) если индикатриса вектора $\bar{e}_1$ *описывает поверхность с касательной плоскостью, параллельной координатной плоскости* $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$*, то поверхности* $(\bar{e}_3)$*,* (A)*,* (A_2)*,* (A_3) *и* (M_2) *являются плоскостями, поверхности* (A_1) *вырождаются в линии, координатная плоскость* $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ *является неподвижной.*

Замечание. Если выполнено условие 4 последней теоремы, то для соответствующих комплексов можно построить их безынтегральное представление по методике, указанной в работе [4].

Список литературы

1. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1980. Ч. 2.

2. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. 1974. Т. 6. С. 113—134.

3. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978. Ч. 1.

4. *Кретов М. В.* Об одном комплексе центральных квадрик, допускающем безынтегральное представление // Материалы XV Воронежской зимней математической школы. Воронеж, 1981. С. 54—55. Деп. в ВИНИТИ 16.12.1981, №5691.

M. Kretov

COMPLEXES OF ELLIPTIC CYLINDERS

In three-dimensional affine space complexes (three-parametrical families) Z_3 of elliptic cylinders with special properties of the associated images are examined. Characteristic and focal varieties of forming elements of investigated complexes are vectorially characterized. The geometrical properties of varieties giving an opportunity further to design of them are obtained.

УДК 514.75

Т.Ю. Максакова

(Балтийский военно-морской институт)

ВЫРОЖДЕННЫЕ ТРЕХСОСТАВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Введен новый класс трехсоставных распределений: WH-распределения, или вырожденные трехсоставные распределения. Дано задание WH-распределения в репере первого порядка R_1 и доказана теорема существования. Показано, что голономное WH-распределение представляет собой (n–r)-параметрическое семейство центрированных тангенциально вырожденных гиперполос CH_m^r [1]. Доказана теорема существования гиперполосы CH_m^r, заданной в репере R_1.

В работе используется следующая система индексов: $p,q,t = \overline{1,r}$; $i,j,k = \overline{r+1,m}$; $\alpha,\beta,\gamma = \overline{m+1,n-1}$; $\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma} = \overline{m+1,n}$; $u,v = \overline{r+1,n-1}$; $\hat{u},\hat{v} = \overline{r+1,n}$; $\hat{A},\hat{B} = \left(\overline{1,r};\overline{m+1,n}\right)$; $K,L = \overline{1,n}$; $s = m-r$.