УДК 514.76

О.В. Сухова

(Пензенский государственный педагогический университет)

ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НАВЕЙРА РИМАНОВЫХ СТРУКТУР ПОЧТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ

Исследуется риманова структура почти произведения на касательном расслоении обобщенного лагранжева пространства с заданной инфинитезимальной связностью. Получены инвариантные характеристики классов Навейра (F,F), (AF,AF), (TGF,TGF) данной структуры. Рассмотрены случаи, когда базисное многообразие является финслеровым пространством, а инфинитезимальная связность порождается или связностью Бервальда, или связностью Картана.

1. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие. На M задана структура почти произведения, если заданы два взаимно дополнительных дифференцируемых распределения — горизонтальное $H: x \to H_x$ и вертикальное $V: x \to V_x$ размерностей p и q соответственно, $T_x M = H_x \oplus V_x$, p+q=n.

Обозначим h и v — операторы проектирования на H и V соответственно: $h^2 = h$, $v^2 = v$, $hv = vh = 0$. Тогда $P = v - h$ есть оператор структуры почти произведения: $P^2 = id$, $P(hX) = -hX$, $P(vX) = vX$ для любого $X \in \Im_0^1 M$.

Пусть < , > — риманова метрика на M.

Римановой структурой почти произведения на M называется структура почти произведения на M такая, что

$$\langle X, Y \rangle = \langle hX, hY \rangle + \langle vX, vY \rangle, \tag{1}$$

где $X, Y \in \Im_0^1 M$.

В [1] Навейра выделил 64 класса римановых структур почти произведения и получил инвариантные характеристики каждого из классов. Все 64 класса в классификации Навейра могут быть определены наложением некоторых условий на каждое из распределений H и V.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением классов (F, F), (AF, AF), (TGF, TGF). Сформулируем определяющие их условия в терминах горизонтального (вертикального) распределения:

F (слоение): $\nabla_X(P)Y = \nabla_Y(P)X$, (2)

AF (антислоение): $\nabla_X(P)X = 0$, (3)

TGF (вполне геодезическое слоение): $\nabla_X(P) = 0$, (4)

где $X, Y \in H$ ($X, Y \in V$) и ∇ - связность Леви-Чивита метрики < , >. Заметим, что одновременное выполнение условий F и AF равносильно условию TGF: {AF и F} $\Leftrightarrow$ TGF.

2. Рассмотрим касательное расслоение TM гладкого n-мерного многообразия M. Пусть $x \to (x^i)$ - локальные координаты на M, $z = (x, y) \to (x^A) = (x^i, x^{n+i} = y^i)$ - естественные локальные координаты на TM. Пусть N — инфинитезимальная связность с коэффициентами N_i^k, определяющая горизонтальное распределение H_z и, следовательно, структуру почти произведения на TM:

$$T_z(TM) = H_z \oplus V_z,$$

где V_z - вертикальное распределение.

Векторные поля $\delta_A = (\delta_i, \dot{\partial}_i)$, образуют локальный базис векторных полей, адаптированный к структуре почти произведения, где $\delta_i = \partial_i - N_i^k \dot{\partial}_k$, $\partial_i = \partial / \partial x^i$, $\dot{\partial}_i = \partial / \partial y^i$. Дуальный ему базис $\delta^B = (dx^k,\ \delta y^k)$ состоит из горизонтальных форм dx^i и вертикальных форм $\delta y^k = dy^k + N^k_p dx^p$.

Структурные уравнения имеют вид:

$$[\delta_i, \delta_j] = R^k_{ij}\dot{\partial}_k,\ [\delta_i, \dot{\partial}_j] = L^k_{ij}\dot{\partial}_k,\ [\dot{\partial}_i, \dot{\partial}_j] = 0, \tag{5}$$

где $R^k_{ij} = \delta_j N^k_i - \delta_i N^k_j$, $L^k_{ij} = N^k_{i \cdot j}$ ($N^k_{i \cdot j} = \dot{\partial}_j N^k_i$).

Пусть базисное многообразие M является обобщенным лагранжевым пространством с метрическим тензором $g = g_{ij}(x, y)dx^i \otimes dx^j$. Обозначим $\overline{\nabla}$ финслерову связность обобщенного лагранжева пространства (M, g), согласованную с метрикой g и без кручения. Если $(\Gamma^k_{ij}, C^k_{ij})$ — коэффициенты этой связности, определяемые разложениями $\overline{\nabla}_{\delta_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k, \overline{\nabla}_{\dot{\partial}_i}\partial_j = C^k_{ij}\partial_k$, $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, то

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}(\delta_i g_{sj} + \delta_j g_{is} - \delta_s g_{ij}), \tag{6}$$

$$C^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}(\dot{\partial}_i g_{sj} + \dot{\partial}_j g_{is} - \dot{\partial}_s g_{ij}).$$

Рассмотрим на TM риманову метрику G следующего вида:

$$G = g_{ij}(x, y)dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(x, y)\delta y^i \otimes \delta y^j. \tag{7}$$

Очевидно, что так определенная метрика G удовлетворяет условию (1) и, следовательно, определяет на TM риманову структуру почти произведения.

Целью данной работы является нахождение инвариантных характеристик классов Навейра (F, F), (AF, AF), (TGF, TGF) в случае, когда в качестве исходного многообразия выбрано касательное расслоение TM с метрикой G, а структура почти произведения определена инфинитезимальной связностью N.

В [2] вычислены коэффициенты $\tilde{\Gamma}^C_{AB}$ связности Леви-Чивита $\tilde{\nabla}$ метрики G, определяемые разложением $\tilde{\nabla}_{\delta_A}\delta_B = \tilde{\Gamma}^C_{AB}\delta_C$.

Анализ условий F, AF, TGF в адаптированных к структуре почти произведения координатах приводит нас к результатам, отраженным в таблице:

Класс	Условия на распределение V	Условия на распределение H
(F, F)	Нет условий	$R^k_{ij} = 0$
(AF, AF)	$g_{pi}B^p_{jk} + g_{kp}B^p_{ji} = 0$	$g_{ij\cdot k} - g_{kp}R^p_{ij} = 0$
(TGF, TGF)	$g_{pi}B^p_{jk} + g_{kp}B^p_{ji} = 0$	$g_{ij\cdot k} = 0$, $R^k_{ij} = 0$

где $B^k_{ij} = L^k_{ij} - \Gamma^k_{ij}$. Условие $R^k_{ij} = 0$ означает, что горизонтальное распределение H_z интегрируемо и, следовательно, определяет слоение. Условия AF и TGF для вертикального распределения совпадают в силу тождественности для него условия F.

3. Пусть базисное многообразие (M, g) является финслеровым пространством (M, F) [3], $g_{ij} = F_{\cdot i \cdot j}$, а инфинитезимальная связность N порождается связностью Бервальда: $N^k_i = G^k_{ip}y^p = G^k_{\cdot i}$, $G^k = \frac{1}{2}G^k_{ij}y^i y^j$, где G^k_{ij} — коэффициенты связности Бервальда.

Вычислим коэффициенты R^k_{ij}, L^k_{ij} объекта неголономности структурных уравнений (5):

$$R^k_{ij} = \delta_j G^k_{\cdot i} - \delta_i G^k_{\cdot j} = (\partial_j - G^p_{\cdot j}\dot{\partial}_p)G^k_{\cdot i} - (\partial_i - G^p_{\cdot i}\dot{\partial}_p)G^k_{\cdot j} =$$
$$= \partial_j G^k_{\cdot i} - \partial_i G^k_{\cdot j} - G^p_{\cdot j}G^k_{\cdot i \cdot p} + G^p_{\cdot i}G^k_{\cdot j \cdot p},$$

или $R^k_{ij} = y^s(\partial_j G^k_{is} - \partial_i G^k_{js} + G^p_{is}G^k_{jp} - G^p_{js}G^k_{ip})$.

Так как первый тензор кривизны связности Бервальда имеет вид:

$$H^k_{sij} = \partial_j G^k_{is} - \partial_i G^k_{js} + G^p_{is}G^k_{jp} - G^p_{js}G^k_{ip} + G^k_{sp\cdot j}G^p_{\cdot i} - G^k_{sp\cdot i}G^p_{\cdot j}$$

и $G^k_{sp\cdot j} = G^k_{jp\cdot s}$, $G^k_{jp\cdot s}y^s = 0$, то, сворачивая H^k_{sij} с y^s, получим

$$y^s H^k_{sij} = R^k_{ij}. \qquad (8)$$

Кроме того,

$$L^k_{ij} = G^k_{i\cdot j\cdot} = G^k_{ij}. \qquad (9)$$

Предложение 1. *Если базисное многообразие является финслеровым пространство и инфинитезимальная связность порождается связностью Бервальда, то горизонтальное распределение определяет слоение, если и только если первый тензор кривизны связности Бервальда удовлетворяет условию* $y^s H^k_{sij} = 0$.

Рассмотрим векторное поле $y = y^i(x)\partial_i$ базисного многообразия (M, F). Оно является параллельным относительно связности Бервальда, если

$$\partial_k y^i + G^i_{jk}y^j = 0. \qquad (10)$$

Условия интегрируемости уравнений (10) имеют вид:

$$y^s H^k_{sij} = 0. \qquad (11)$$

Если (11) выполняется тождественно, то общее решение (10) содержит n произвольных постоянных. Следовательно, существует n линейно независимых векторных полей $y_a = y^i_a \partial_i$ ($a = 1,...,n$) и на базе M есть структура абсолютного параллелеизма.

Предложение 2. Если *базисное многообразие* M *является финслеровым пространством, инфинитезимальная связность* *порождается связностью Бервальда и горизонтальное распределение этой связности определяет слоение, то на базе* M *существует структура абсолютного параллелеизма относительно связности Бервальда.*

Предложение 3. *Пусть* M — *финслерово пространство, инфинитезимальная связность порождается связностью Бервальда, тогда риманова структура почти произведения принадлежит классу (—,AF), если и только если*

$$g_{ij\cdot k} - g_{kp} y^s H^p_{sij} = 0 .$$

Предложение 4. *Пусть* M — *финслерово пространство, инфинитезимальная связность порождается связностью Бервальда, тогда вертикальное распределение задает вполне геодезическое слоение (риманова структура почти произведения принадлежит классу (TGF,—)), если и только если выполняется условие*

$$g_{pi}(G^p_{jk} - \Gamma^p_{jk}) + g_{kp}(G^p_{ji} - \Gamma^p_{ji}) = 0 .$$

4. Пусть (M, g) — финслерово пространство и инфинитезимальная связность N порождается усеченной связностью Картана ∇^*: $N^k_i = y^j \Gamma^{*k}_{ij}$. В этом случае коэффициенты R^k_{ij}, L^k_{ij} имеют вид:

$$R^k_{ij} = \delta_j(y^s \Gamma^{*k}_{is}) - \delta_i(y^s \Gamma^{*k}_{js}) =$$

$$= (\partial_j - y^p \Gamma^{*l}_{jp} \dot{\partial}_l)(y^s \Gamma^{*k}_{is}) - (\partial_i - y^p \Gamma^{*l}_{ip} \dot{\partial}_l)(y^s \Gamma^{*k}_{js}) =$$

$$= y^s(\partial_j \Gamma^{*k}_{is} - \partial_i \Gamma^{*k}_{js} + \Gamma^{*l}_{is} \Gamma^{*k}_{jl} - \Gamma^{*l}_{jl} \Gamma^{*k}_{il} + \Gamma^{*l}_{i0} \Gamma^{*k}_{js\cdot l} - \Gamma^{*l}_{j0} \Gamma^{*k}_{is\cdot l}),$$

где $\Gamma^{*k}_{i0} = y^p \Gamma^{*k}_{ip}$.

Таким образом,

$$R^k_{ij} = y^s K^k_{sij}, \qquad (12)$$

где K^k_{sij} — первый тензор кривизны связности Картана.

Вычисляя $L_{ij}^{k} = \dot{\partial}_j (y^p \Gamma^{*k}_{ip}) = y^p \Gamma^{*k}_{ip\cdot j} + \Gamma^{*k}_{ij}$ и учитывая, что $\Gamma^{*k}_{ij} = \Gamma_{ij}^{k}$, находим:

$$B_{ij}^{k} = y^p \Gamma^{*k}_{ip\cdot j}. \quad (13)$$

Учитывая (12) и (13), приходим к следующим результатам:

Предложение 5. *Если базисное многообразие является финслеровым пространством и инфинитезимальная связность порождается связностью Картана, то горизонтальное распределение этой связности определяет слоение, если и только если первый тензор кривизны связности Картана удовлетворяет условию* $y^s K_{sij}^{k} = 0$.

По аналогии с предложением 2 можно сформулировать

Предложение 6. *Если базисное многообразие* M *является финслеровым пространством, инфинитезимальная связность порождается связностью Картана и горизонтальное распределение определяет слоение, то на базе* M *существует структура абсолютного параллелеизма относительно связности Картана.*

Предложение 7. *Пусть* M — *финслерово пространство, инфинитезимальная связность порождается связностью Картана, тогда риманова структура почти произведения принадлежит классу (—,AF), если и только если*

$$g_{ij\cdot k} - g_{kp} y^s K_{sij}^{p} = 0.$$

Предложение 8. *Пусть* M — *финслерово пространство, инфинитезимальная связность порождается связностью Картана, тогда вертикальное распределение задает вполне геодезическое слоение (риманова структура почти произведения принадлежит классу (TGF,—)), если и только если выполняется условие*

$$y^s (g_{pi} \Gamma^{*p}_{js\cdot k} + g_{kp} \Gamma^{*p}_{js\cdot i}) = 0.$$

Список литературы

1. *Naveir A.M.* A classification of Riemannian almost-product manifolds // Rend. mat. appl. 1983. V. 3. № 3. P. 577—592.

2. *Паньженский В.И.* Инвариантные характеристики некоторых классов почти эрмитовых структур // Тр. геом. семинара. Казань, 1997. Вып. 23. С. 77—83.

3. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.

O. Suhova

THE INVARIANT CHARACTERISTICS OF SOME NAVEIRA'S CLASSES OF RIEMANNIAN ALMOST-PRODUCT STRUCTURES ON THE TANGENT BUNDLE OF SMOOTH MANIFOLD

The Riemannian almost product structures on the tangent bundle of generalized Lagrangian space with given infinitesimal connection is investigated. The invariant characteristics of Naveira's classes (F,F), (AF,AF), (TGF,TGF) of this structure are obtained. They are considered for the cases when the basis manifold is the Finsler space and the infinitesimal connection is generated by the Berwald's connection or the Cartan's connection.

УДК 514.75

М.А. Чешкова

(Алтайский государственный университет)

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

В евклидовом пространстве E^3 изучаются поверхности вращения, у которых гауссова кривизна посто-