УДК 514.75

К. В. Полякова

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

Аналитический и геометрический способы задания аффинной связности

Рассмотрены аналитический (с помощью форм связности) и геометрический (с помощью горизонтальных векторов) способы задания аффинной связности. Дана новая геометрическая интерпретация тензору кривизны.

Ключевые слова: линейная связность, горизонтальные векторы, ковариантные производные.

1. Структурные уравнения расслоения $L(X_m)$ касательных линейных реперов на гладком многообразии X_m имеют вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \; d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \qquad (1)$$

где $\omega^i_{[jk]} \equiv 0 \pmod{\omega^i}$; $i, j, k, ... = \overline{1, m}$. Продолжая уравнения ($1_2$), получим

$$d\omega^i_{jk} = \omega^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \omega^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \omega^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \omega^l \wedge \omega^i_{jkl}. \qquad (2)$$

Выражение для дифференциала точки $A \in L(X_m)$ запишем в виде

$$dA = \omega^i e_i + \omega^i_j e^j_i, \qquad (3)$$

где e_i, e^j_i — векторы подвижного репера 1-го порядка, на которые натянуто касательное пространство $T_{m+m^2} = [e_i, e^j_i]$ к расслоению $L(X_m)$ в точке A.

Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i = 0$ фиксирует точку многообразия X_m и, следовательно, слой расслоения $L(X_m)$. Таким образом, касательное пространство T_{m+m^2} содержит вертикальное пространство $T_{m^2} = [e_i^j]$, касательное к слою в точке A.

Продифференцируем уравнения (3) внешним образом:

$$(de_i - e_k^j \omega_{ji}^k) \wedge \omega^i + de_i^j \wedge \omega_j^i - \underline{e_j \omega_i^j \wedge \omega^i} + \underline{\underline{e_i^j \omega_j^k \wedge \omega_k^i}} = 0. \quad (4)$$

Сгруппируем слагаемые в (4), например, следующим образом: в слагаемом, подчеркнутом одной чертой, вынесем за скобку формы ω^i, а в слагаемом, подчеркнутом двумя чертами, вынесем за скобку формы ω_j^i (предварительно сделав замену индексов $j \leftrightarrow k$). Итак, в данном случае имеем

$$(de_i - e_j \omega_i^j - e_k^j \omega_{ji}^k) \wedge \omega^i + (de_i^j + e_i^k \omega_k^j) \wedge \omega_j^i = 0. \quad (4')$$

Разрешая уравнения (4′) по лемме Картана, получим

$$de_i - e_j \omega_i^j - e_k^j \omega_{ji}^k = e_{ij} \omega^j + e_{ij}^k \omega_k^j, \quad (5)$$

$$de_i^j + e_i^k \omega_k^j = e_{ik}^j \omega^k + e_{ik}^{jl} \omega_l^k,$$

причем новые векторы

$$e_{ij} = e_{ji}, \; e_{ij}^k = e_{ji}^k, \; e_{ik}^{jl} = e_{ki}^{lj} \quad (6)$$

симметричны и удовлетворяют сравнениям по модулю базисных форм ω^i, ω_j^i расслоения $L(X_m)$:

$$\begin{aligned} de_{ij} &\equiv e_{il}^k \omega_{kj}^l + e_k \omega_{ij}^k + e_{kj}^l \omega_{li}^k + e_k^l \omega_{lij}^k, \\ de_{ij}^k &\equiv e_{sj}^{lk} \omega_{li}^s + e_l^k \omega_{ji}^l, \;\; de_{ik}^{jl} \equiv 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Замечание. Если в выражении (4) в слагаемом, подчеркнутом одной чертой, вынесем за скобку формы ω_j^i, то все результаты данной статьи сохранятся.

Замечание. Если в выражении (4) в слагаемом, подчеркнутом двумя чертами, вынесем за скобку формы ω^i_j (предварительно сделав замену индексов $i \leftrightarrow k$), то получим

$$(de_i - e_j\omega^j_i - e^j_k\omega^k_{ji}) \wedge \omega^i + (de^j_i - e^j_k\omega^k_i) \wedge \omega^i_j = 0\,. \qquad (4'')$$

Разрешаем уравнения (4″) по лемме Картана:

$$de^j_i - e^j_k\omega^k_i = e^j_{ik}\omega^k + e^{jl}_{ik}\omega^k_l\,. \qquad (5_2')$$

Сравнивая уравнения (5_2) и ($5_2'$), убеждаемся в возможности равенств

$$e^k_i\omega^j_k = -e^j_k\omega^k_i\,, \qquad (8)$$

дифференциальным следствием которых являются сравнения

$$e^k_i\omega^j_{kl} \equiv -e^j_k\omega^k_{il}\,.$$

Запишем уравнения (5) в виде сравнений

$$de_i \equiv e^j_k\omega^k_{ji}\,,\ de^j_i \equiv 0\,. \qquad (9)$$

Сравнения (9_2) означают инвариантность каждого из m^2 векторов e^j_i, т.е. вертикальное пространство T_{m^2} является линейной оболочкой m^2 одномерных подпространств, определяемых векторами e^j_i.

2. Аффинная связность в главном расслоении $L(X_m)$ задается по Ю. Г. Лумисте с помощью форм

$$\tilde\omega^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k\,, \qquad (9)$$

причем

$$d\tilde\omega^i_j = \tilde\omega^k_j \wedge \tilde\omega^i_k + \omega^k \wedge (\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk}) - \Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{sl}\omega^k \wedge \omega^l\,. \quad (10)$$

Из выражения (10) видно, что компоненты объекта аффинной связности Γ^i_{jk} удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l\,. \qquad (11)$$

Структурные уравнения форм связности имеют вид

$$d\widetilde{\omega}_j^i = \widetilde{\omega}_j^k \wedge \widetilde{\omega}_k^i + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \qquad (12)$$

где тензор кривизны R^i_{jkl} выражается по формуле

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{sl]}. \qquad (13)$$

3. Зададим геометрическую связность в касательном расслоении $T(L(X_m))$ с помощью горизонтальных векторов [1; 2]:

$$E_k = e_k + e_i^j L^i_{jk}. \qquad (14)$$

Дифференциалы векторов E_k имеют вид

$$dE_k = E_i\omega^i_k + e_i^j\left(dL^i_{jk} + \omega^i_{jk}\right) + \omega^j\left(e_{kj} + e^l_{ij}L^i_{lk}\right) +$$
$$+\,\omega^i_j\left(e^j_{ki} + e^{sj}_{li}L^l_{sk} - e^j_l L^l_{ik} - \delta^j_k e^s_l L^l_{si}\right). \qquad (15)$$

Из выражения (15) можно записать уравнения на компоненты L^i_{jk}:

$$dL^i_{jk} + \omega^i_{jk} = L^i_{jkl}\omega^l + L^{i\,s}_{jkl}\omega^l_s, \qquad (16)$$

причем компоненты $L^i_{jkl}, L^{i\,s}_{jkl}$ удовлетворяют сравнениям по модулю форм ω^i, ω^i_j:

$$\begin{gathered} dL^i_{jkl} - L^{i\,s}_{jkp}\omega^p_{sl} + \omega^i_{jkl} \equiv 0, \\ dL^{i\,s}_{jkl} - \delta^i_l\omega^s_{jk} + \delta^s_j\omega^i_{lk} + \delta^s_k\omega^i_{jl} \equiv 0. \end{gathered} \qquad (17)$$

Из уравнений (17_2) и (16) видно, что справедлив охват

$$L^{i\,s}_{jkl} = -\delta^i_l L^s_{jk} + \delta^s_j L^i_{lk} + \delta^s_k L^i_{jl}. \qquad (18)$$

Подставляя равенства (18) в уравнения (16), получим уравнения вида (11), т.е. равенства (18) являются условиями совпадения компонент L^i_{jk} объекта геометрической связности в расслоении $T(L(X_m))$ (см., напр., [3]) и компонент Γ^i_{jk} объекта аффинной связности в расслоении $L(X_m)$.

Вывод. При выполнений равенств (18) геометрическая L^i_{jk} и аффинная Γ^i_{jk} связности совпадают.

Выражение (15) с учетом уравнений (16) принимает вид

$$dE_k = E_i \omega^i_k + E_{ki}\omega^i + E^{\ i}_{kj}\omega^j_i , \tag{19}$$

где

$$\begin{gathered} E_{ki} = e_{ki} + e^l_{ji} L^j_{lk} + e^l_j L^j_{lki} , \\ E^{\ i}_{kj} = e^{\ i}_{kj} + e^{si}_{lj} L^l_{sk} - e^i_l L^l_{jk} - \delta^i_k e^s_l L^l_{sj} + e^s_l L^{l\ i}_{skj} , \end{gathered} \tag{20}$$

причем справедливы сравнения по модулю форм ω^i , ω^i_j:

$$dE_{ki} \equiv E^l_{kj}\omega^j_{li} + E_j \omega^j_{ki} ,\ dE^{\ i}_{kj} \equiv 0 . \tag{21}$$

4. В пункте 3 для задания связности в касательном расслоении $T(L(X_m))$ рассмотрен способ, основанный на построении горизонтальных векторов (14). Модифицируем этот способ для задания связности в главном расслоении $L(X_m)$. Для этого выражение (15) запишем в виде

$$\begin{aligned} dE_k = E_i \omega^i_k + e^j_i \left(dL^i_{jk} - L^i_{lk}\omega^l_j - L^i_{jl}\omega^l_k + \omega^i_{jk}\right) + \\ + \omega^j \left(e_{kj} + e^l_{ij} L^i_{lk}\right) + \omega^i_j \left(e^{\ j}_{ki} + e^{sj}_{li} L^l_{sk}\right), \end{aligned} \tag{22}$$

а в уравнения (5_2) внесем формы связности $\hat{\omega}^i_j = \omega^i_j - L^i_{jk}\omega^k$.

Уравнения (5_2) примут вид

$$\nabla e^j_i = \nabla_k e^j_i \omega^k ,$$

где

$$\begin{gathered} \nabla e^j_i = de^j_i + e^k_i \hat{\omega}^j_k - e^{jl}_{ik} \hat{\omega}^k_l , \\ \nabla_k e^j_i = e^j_{ik} + e^{js}_{il} L^l_{sk} - e^l_i L^j_{lk} , \end{gathered} \tag{23}$$

причем согласно уравнениям (7, 16) справедливы сравнения

$$\Delta\nabla_k e_i^j \equiv 0 .$$

Замечание. С учетом равенства (8) требование $e_i^k \hat{\omega}_k^j = -e_k^j \hat{\omega}_i^k$ становится естественным, что влечет за собой

$$e_i^k L_{kl}^j = -e_k^j L_{il}^k .$$

Полагаем ковариантные производные нулю, т. е.

$$e_{ik}^j = -e_{il}^{js} L_{sk}^l + e_i^l L_{lk}^j . \qquad (24)$$

Используя равенство (24) с учетом симметрии (6), выражение (22) приведем к виду

$$dE_k = E_i\omega_k^i + e_i^j (\Delta L_{jk}^i + \omega_{jk}^i) + \omega^j (e_{kj} + e_{ij}^l L_{lk}^i) . \qquad (25)$$

Следовательно, компоненты L_{jk}^i удовлетворяют уравнениям

$$\Delta L_{jk}^i + \omega_{jk}^i = L_{jkl}^i \omega^l . \qquad (26)$$

Теорема. *Горизонтальные векторы (14) задают аффинную связность в главном расслоении $L(X_m)$, если вертикальные векторы e_i^j ковариантно постоянны.*

Выражение (25) с учетом уравнений (26) принимает вид

$$dE_k = E_i\omega_k^i + E_{kj}\omega^j ,$$

где

$$E_{kj} = e_{kj} + e_{ij}^l L_{lk}^i + e_i^l L_{lkj}^i .$$

Альтернирование точек E_{kj} дает

$$E_{[kj]} = e_i^l R_{lkj}^i , \qquad (27)$$

причем

$$R_{jkl}^i = L_{j[kl]}^i - L_{j[k}^s L_{sl]}^i .$$

Формула (27) демонстрирует геометрический смысл тензора кривизны R_{jkl}^i .

Список литературы

1. *Шевченко Ю.И.* Non-symmetric structure of adjoining spaces of a principal bundle // Proceedings of Joint International Scientific Conference «New Geometry of Nature». Kazan, 2003. P. 187—190.
2. *Полякова К.В., Шевченко Ю.И.* Способы Лаптева—Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2012. Вып. 43. С. 114—121.
3. *Номидзу К.* Группы Ли и дифференциальная геометрия / пер. с англ. М., 1960.

K. Polyakova

Analytical and geometrical giving the affine connection

Analytical (by means of forms) and geometrical (by means of horizontal vectors) giving the affine connection are considered. New geometric interpretation of the curvature tensor is given.

УДК 514.76

К.В. Полякова, Ю.И. Шевченко

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

Способ Лаптева — Лумисте задания связности и горизонтальные векторы

Описаны два приема задания фундаментально-групповой связности в главном расслоении: способ Лаптева — Лумисте с помощью форм связности и двойственный способ с помощью горизонтальных векторов. Показана универсальность первого способа по сравнению со вторым.

***Ключевые слова*:** фундаментально-групповая связность, формы связности, объект связности, объект кривизны, горизонтальные векторы, геометрическая связность.