

О. А. Смирнов, О. О. Смирнова

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЦЕНОВОЙ ДИСКРИМИНАЦИИ
МЕТОДОМ ДЕРЕВЬЕВ КЛАССИФИКАЦИИ**

Рассматриваются возможности моделирования показателей ценовой дискриминации с помощью метода деревьев классификации на основе алгоритма функции «отсеивания» Джини на примере анализа рыночного поведения доминирующей фирмы, находящейся в условиях олигополии на российском рынке угля. Показано, что анализ ветвления дерева классификации позволяет определить характеристики «ценовых коридоров», устанавливаемых для различных групп потребителей даже в условиях незначительной вариации.

Paper discusses possibilities of parameters price discrimination modeling on base of the method of classification trees based on the algorithm of Gini feature selection, by analyzing market behavior of dominant firms under oligopoly on the Russian coal market. It is shown that analysis based on branching tree classification determine the characteristics of the "price corridor" that dominated firm use for different groups of consumers, even in conditions of slight variations.

Ключевые слова: деревья классификации, индекс отсеивания Джини, ценовая дискриминация, многомерные статистические методы, доминирующая фирма.

Key words: classification trees, Gini index selection, price discrimination, multivariate statistical methods, dominant firm.

Ценовая дискриминация — распространенный тип злоупотреблений доминирующим положением, заключающейся в разделении покупателей на группы с целью установления различных цен на одни товар или услу-



гу и, таким образом, влияния на конкуренцию на смежных рынках. В исследованиях в области теории отраслевых рынков выявляются показатели, согласно которым доминирующие фирмы могут разделять покупателей на группы в зависимости от эластичности спроса. При этом этот вопрос разницы в установлении цен между группами потребителями не может быть решен без математического моделирования. Так, обычно фирмы используют политику «ценовых коридоров» при установлении цен различным группам потребителей. При этом частично диапазоны цен могут пересекаться, что на практике существенно затрудняет установление применения различных цен к различным группам потребителей на один товар или услугу. Поэтому с целью государственного регулирования дефектов рынков необходима разработка инструментов, позволяющих оценивать вероятностные характеристики пороговых значений диапазонов цен между группами потребителей. Особенно это важно для анализа поведения фирм на олигополическом рынке, когда дискриминация потребителей не может быть обнаружена явно.

Для решения задачи можно использовать метод *деревьев классификации*, позволяющий находить пороговые значения принадлежности к определенному классу на основе одной или нескольких предикторных переменных, например, принадлежность к одной группе потребителей. При этом разделение на классы заранее определено, а также заданно и количество классов. Опишем постановку задачи классификации посредством метода построения дерева классификации.

Обозначим t_p как исходный («родительский») узел, при этом t_l, t_r — последовательно левый и правый узел по отношению к исходному («родительскому») углу. Предположим, что задана матрица переменных A' с M переменными x_j и N наблюдениями. Тогда вектор Y состоит из N наблюдений, которые могут принадлежать к K классам.

Дерево классификации, построенное в соответствии с правилом разделения, согласно которому разделяются на две группы максимально гомогенные наблюдения (рис. 1). Максимальная однородность разделяемых узлов определяется с помощью функции «отсеивания» $i(t)$. Для исходного узла t_p данная функция является константой для всех возможных значений разделения переменной $x_j < x_j^R, j = 1, \dots, M$.

Максимальная однородной левой и правой узловых точек будет равнозначна максимизации изменений функции «отсеивания» $\Delta i(t): \Delta i(t) = i(t_p) - E[i(t_c)]$, где t_c — левые и правые значения для исходного узла t_p . Если предположить, что P_l, P_r — вероятности левого и правого узла, получаем: $\Delta i(t) = i(t_p) - P_l i(t_l) - P_r i(t_r)$.

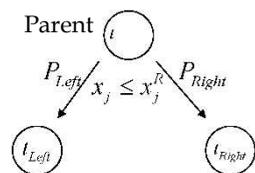


Рис. 1. i, i_{left}, i_{right} — исходная точка, левая и правая ветви; x_j — переменная j ; x_j^R — лучшее разделение переменной x_j



Поэтому в каждом узле классификации происходит максимизация согласно следующей формуле:

$$\underbrace{\arg \max}_{x_j \leq x_j^R, j=1, \dots, M} [i(t_p) - P_l i(t_l) - P_r i(t_r)] .$$

Данные выражения означают, что при классификации выявляются все возможные значения переменных в матрице X для принятия наилучшего решения по разделению $x_j < x_j^R$, которое будет максимизировать изменения в оценке «отсеивания» $\Delta i(t)$.

Для определения функции «отсеивания» для сильно зашумленных данных используется механизм «отсеивания» Джини, определяемый следующим образом:

$$i(t) = \sum_{k \neq l} p(k|t)p(l|t),$$

где $k = l, \dots, K$ – индекс класса; $p(k|t)$ – условная вероятность того, что класс k станет причиной разделения в узле t . Таким образом, применение индекса Джини к оценке функции «отсеивания» для максимизации однородности распределения рассчитывается по следующей формуле:

$$\Delta i(t) = - \sum_{k=1}^K p^2(k|t_p) + P_l \sum_{k=1}^K p^2(k|t_l) + P_r \sum_{k=1}^K p^2(k|t_r).$$

Таким образом, алгоритм оценки функции «отсеивания» с помощью алгоритма Джини решает следующую проблему оценки:

$$\underbrace{\arg \max}_{x_j \leq x_j^R, j=1, \dots, M} \left[- \sum_{k=1}^K p^2(k|t_p) + P_l \sum_{k=1}^K p^2(k|t_l) + P_r \sum_{k=1}^K p^2(k|t_r) \right] .$$

Воспользуемся данным алгоритмом для оценки показателей ценовой дискриминации на основе анализа данных продаж угля марки «бурый» за 2011 год одной из занимающей доминирующее положение компаний на российском рынке угля, который можно рассматривать как олигополический рынок. В целом всех потребителей угля можно разделить на следующие группы: электрогенерация, теплогенерация, ЖКХ, промышленность, оптовая торговля (перепродажа угля) и физические лица. При этом гипотеза о характере рыночного поведения заключается в том, что компания устанавливает различные цены на идентичный товар (бурый уголь одного угольного разреза) с учетом принадлежности к отрасли и конечному потреблению. Поскольку у компании есть свои региональные торговые дома, то цена для компаний, осуществляющих мелкооптовую торговлю и не входящих в группу лиц, будет выше, чем для конечных потребителей, а вследствие того что многие электрогенерирующие и теплогенерирующие мощности зависят от конкретной марки угля определенного угольного бассейна, компания устанавливает различные цены в соответствии с возможностями потребителей переходить на другой вид угля.



Оценка размаха вариации рентабельности продаж данным потребителем говорит об установлении различного уровня цен и наличии определенного «ценового коридора». Так, рентабельность продаж в среднем на 8 % ниже промышленным предприятиям, чем посредникам, занимающимся перепродажей угля (рис. 2). Однако существенная вариация в границах группы указывает на вероятное применение еще одного дифференцирующего фактора, например, годового объема потребления.

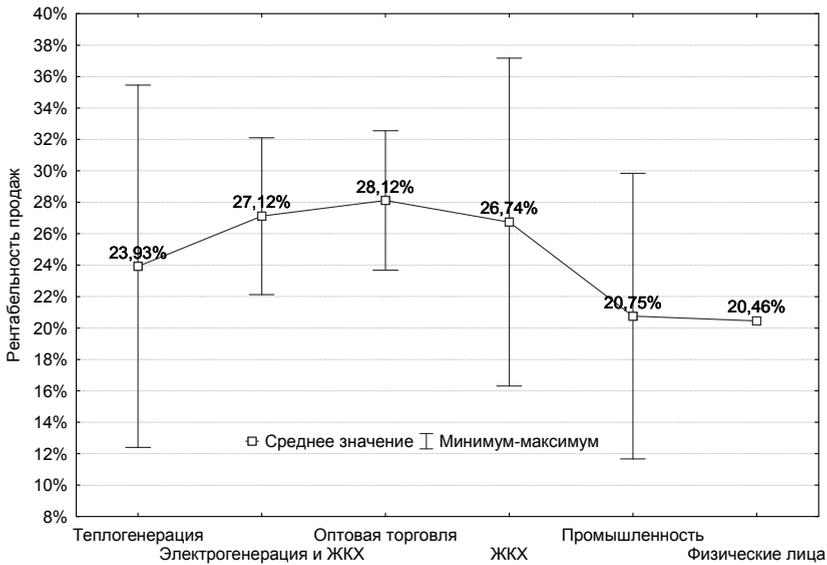


Рис. 2. Оценка размаха вариации показателя рентабельности продаж для различных групп потребителей

Построение дерева классификации на основе нормированных показателей годового объема продаж и средней рентабельности продаж указывает на возможности установления пороговых значений разделения потребителей на группы при анализе ветвления (рис. 3).

Например, рентабельность оптовой торговли выше при любом годовом объеме продаж по сравнению со всеми группами потребителей, при этом при небольшом объеме продаж рентабельность для потребителей ЖКХ ниже, чем для промышленных предприятий, несмотря на то что средний уровень рентабельности продаж ЖКХ выше на 6 % аналогичного показателя для промышленности.

Таким образом, применение метода деревьев классификации позволяет выявить особенности рыночного поведения доминирующей фирмы и на основе сопоставления пороговых значений определить вероятные границы «ценовых» коридоров для групп потребителей в зависимости от годового объема продаж.

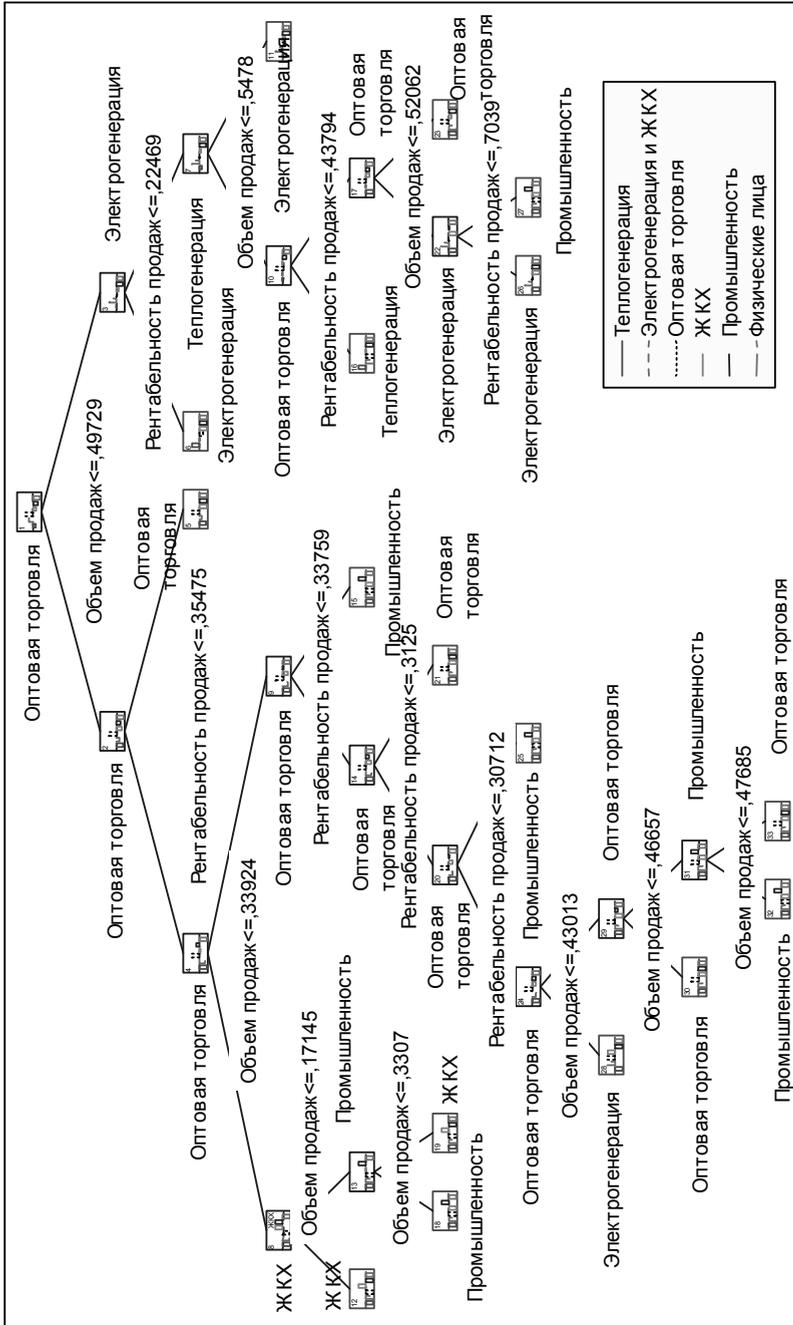


Рис. 3. Дерево классификации групп потребителей угля марки «бурый», 2011 г.



Список литературы

1. Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др. Формальные языки и автоматы VII: формальные ряды деревьев (ч. 1) // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2011. № 10. С. 5–32.

2. Смирнова О. О., Богданов Д. Д. Ценовая дискриминация третьего типа: вопросы выявления и регулирования // Научное обозрение. 2013. № 6. С. 92–95.

3. Смирнова О. О. Совершенствование методологии регулирования ценовой дискриминации: опыт России и ЕС // Экономические и гуманитарные науки. 2013. № 9. С. 57–62.

Об авторах

Олег Аркадьевич Смирнов – канд. физ.-мат. наук, доц., Московский финансово-промышленный университет «Синергия», Москва.

E-mail: smirnovoleg1952@mail.ru

Ольга Олеговна Смирнова – канд. эконом. наук, вед. науч. сотр., Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Москва.

E-mail: smirnovaolga1978@mail.ru

About the authors

Dr Oleg Smirnov – Ass. Prof., Moscow University of Industry and Finance "Synergy", Moscow.

e-mail: smirnovoleg1952@mail.ru

Dr Olga Smirnova – chief researcher, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow.

E-mail: smirnovaolga1978@mail.ru