УДК 514.76

М. Б. Банару[1]
[1] Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-4

О 6-мерных подмногообразиях Вайсмана — Грея алгебры октав

Установлено, что вполне геодезические гиперповерхности 6-мерных подмногообразий Вайсмана — Грея алгебры октав допускают слабо косимплектическую структуру.

***Ключевые слова**:* почти эрмитово многообразие, многообразие Вайсмана — Грея, почти контактная метрическая структура, слабо косимплектическая структура, вполне геодезическая гиперповерхность, алгебра Кэли.

1. Опубликованная в 1980 году статья [1] Альфреда Грея и Луиса М. Хервеллы — наверное, самая цитируемая работа в области эрмитовой геометрии. Эта статья содержит ставшую общепринятой классификацию почти эрмитовых структур по дифференциально-геометрическим инвариантам первого порядка. В соответствии с этой классификацией почти эрмитовы структуры разбиты на 16 классов. Работа содержит оформленные в виде таблицы аналитические признаки принадлежности каждой конкретной структуры к тому или иному классу [1].

За многообразиями класса $W_1 \oplus W_4$ с 90-х годов прошлого века закрепилось название многообразий Вайсмана — Грея, поскольку именно упомянутый выше американский геометр и израильский специалист Изу Вайсман внесли наибольший

Поступила в редакцию 12.05.2019 г.

вклад в изучение многообразий этого класса (а также классов приближенно келеровых и локально конформно келеровых многообразий, содержащихся в классе $W_1 \oplus W_4$). Многими глубокими работами в данной области отметился отечественный геометр В. Ф. Кириченко (он и предложил термин «многообразие Вайсмана — Грея»), а также его ученики (см., например, одну из недавно опубликованных работ [2]). Отметим, что важнейшей особенностью этого класса является его замкнутость относительно конформных преобразований метрики [3].

2. Как известно [1], под почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} понимают пару $\{J, g = \langle \cdot,\cdot \rangle\}$, состоящую из почти комплексной структуры J и римановой метрики $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$, причем J и $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на многообразии M^{2n}. Для всякой AH-структуры $\{J, g = \langle \cdot,\cdot \rangle\}$ на многообразии M^{2n} определяется так называемая фундаментальная форма:

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитова структура принадлежит классу $W_1 \oplus W_4$ [1], если

$$\nabla_X(F)(X,Y) = -\frac{1}{2(n-1)}\Big(\|X\|^2 \delta F(Y) - \langle X,Y \rangle \delta F(X) - \\ - \langle JX,Y \rangle \delta(JX)\Big), \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Напомним, что почти контактной метрической структурой на многообразии N называется система $\{\Phi,\ \xi,\ \eta,\ g\}$, состоящая из четырех тензорных полей на этом многообразии, в том случае, когда для нее выполняются условия:

$$\eta(\xi)=1;\ \Phi(\xi)=0;\ \eta\circ\Phi=0;\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$

$$\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\ X,Y\in\aleph(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Хорошо известно, что многообразие, допускающее почти контактную метрическую структуру, нечетномерно и ориентируемо. Примерами почти контактной метрической структуры являются косимплектическая структура [3], характеризуемая тождеством

$$\nabla\eta=\nabla\Phi=0,$$

а также слабо косимплектическая структура, определяемая соотношением

$$(\nabla_X\Phi)X=0,$$

где ∇ — риманова связность метрики g.

По нашему мнению, ведущим специалистом в области геометрии слабо косимплектических структур является японский геометр Хироши Эндо. Кстати, в некоторых литературных источниках многообразия, снабженные слабо косимплектической структурой, называют многообразиями Эндо.

3. В [4] В. Ф. Кириченко получил первую группу структурных уравнений почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразий алгебры Кэли:

$$d\omega^a=\omega_b^a\wedge\omega^b+\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ah[b}D_h^{c]}\omega_b\wedge\omega_c+\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh}D_{hc}\omega^c\wedge\omega_b;$$

$$d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D_{c]}^h \omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b .$$

Здесь $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ — компоненты тензора Кронекера третьего порядка;

$$D_{cj} = \pm T_{cj}^8 + iT_{cj}^7 ,\ D_{\hat{c}j} = \pm T_{\hat{c}j}^8 - iT_{\hat{c}j}^7 ,$$

где $\{T_{ij}^\phi\}$ — компоненты конфигурационного тензора; φ = 7, 8; *a, b, c, d, h* = 1, 2, 3; *i, j* = 1, 2, 3, 4, 5, 6; $\hat{a} = a + 3$.

Используя условия принадлежности произвольной почти эрмитовой структуры классу многообразий Вайсмана — Грея [5; 6], мы получаем

Предложение 1. *Почти эрмитова структура на 6-мерном подмногообразии алгебры октав принадлежит классу* $W_1 \oplus W_4$ *тогда и только тогда, когда*

$$D_{ab} = D_{\hat{a}\hat{b}} = 0 ,\ D_{\hat{a}b} = \lambda \delta_b^a ,\ D_{a\hat{b}} = \lambda \delta_a^b . \tag{1}$$

Условия (1) позволяют получить структурные уравнения почти контактной метрической структуры, индуцированной на ориентируемой вполне геодезической гиперповерхности 6-мерного подмногообразия Вайсмана — Грея алгебры Кэли.

Предложение 2. *Первая группа структурных уравнений Картана почти контактной метрической структуры, индуцированной на гиперповерхности 6-мерного подмногообразия Вайсмана — Грея алгебры октав, имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned} d\,\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + H^{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta \wedge \omega_\gamma + H^{\alpha\beta} \omega_\beta \wedge \omega ; \\ d\,\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + H_{\alpha\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + H_{\alpha\beta} \omega^\beta \wedge \omega ; \\ d\,\omega &= -\frac{2}{3} G_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta - \frac{2}{3} G^{\alpha\beta} \omega_\alpha \wedge \omega_\beta , \end{aligned} \tag{2}$$

где α, β, $\chi = 1, 2$. Уравнения (2) в точности соответствуют структурным уравнениям слабо косимплектической структуры [7; 8].

Теорема. *Вполне геодезические гиперповерхности 6-мерных подмногообразий Вайсмана — Грея алгебры октав допускают слабо косимплектическую структуру.*

Отметим, что для приближенно келеровых многообразий (то есть для многообразий класса W_1, который входит в состав класса многообразий Вайсмана — Грея) известно, что слабо косимплектическая структура является единственно возможной почти контактной метрической структурой, реализуемой на вполне геодезических гиперповерхностях таких многообразий. Допускают ли вполне геодезические гиперповерхности 6-мерных подмногообразий Вайсмана — Грея алгебры октав почти контактные метрические структуры, отличные от слабо косимплектической, — вопрос, на который нам только предстоит ответить.

Список литературы

1. *Gray A., Hervella L.M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. Vol. 123, №4. P. 35—58.

2. *Ignatochkina L.A., Abood H.M.* On Vaisman — Gray manifold with vanishing conharmonic curvature tensor // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 101, №10. P. 2271—2284.

3. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

4. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Матем. 1980. №8. С. 32—38.

5. *Банару М.Б., Кириченко В.Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Успехи математических наук. 1994. №1. С. 205—206.

6. *Банару М.Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Математический сборник. 2002. Т. 193, №5. С. 3—16.

7. *Банару М.Б.* Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2014. Т. 126. С. 10—61.

8. *Степанова Л.В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1995.

9. *Банару М.Б.* Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно келеровых многообразиях // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2014. №3. С. 60—62.

M. Banaru[1]
[1] Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-4

On six-dimensional Vaisman — Gray submanifolds of the octave algebra

Submitted on May 12, 2019

The $W_1 \oplus W_4$ class of almost Hermitian manifolds (in accordance with the Gray — Hervella classification) is usually named as the class of Vaisman — Gray manifolds. This class contains all Kählerian, nearly Kählerian and locally conformal Kählerian manifolds. As it is known, Vaisman — Gray manifolds are invariant under the conformal transformations of the metric.

A criterion in the terms of the configuration tensor for an arbitrary six-dimensional submanifold of Cayley algebra to belong to the Vaisman — Gray class of almost Hermitian manifolds is established. The Cartan structural equations of the almost contact metric structures induced on oriented hypersurfaces of six-dimensional Vaisman — Gray submanifolds of the octave algebra are obtained. It is proved that totally geodesic hypersurfaces of six-dimensional Vaisman — Gray submanifolds of Cayley algebra admit nearly cosymplectic structures (or Endo structures). This result is a generalization of the previously proved fact that totally geodesic hypersurfaces of nearly Kählerian manifolds also admit nearly cosymplectic structures.

Keywords: almost Hermitian manifold, Vaisman — Gray manifold, almost contact metric structure, nearly cosymplectic structure, totally geodesic hypersurface, Cayley algebra.

References

1. *Gray, A., Hervella, L.M.:* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. Ann. Mat. Pura Appl., **123**:4, 35—58 (1980).

2. *Ignatochkina, L.A., Abood, H.M.:* On Vaisman — Gray manifold with vanishing conharmonic curvature tensor. Far East Journal of Mathematical Sciences. **101**:10, 2271—2284 (2017).

3. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013) (in Russian).

4. *Kirichenko, V.F.:* Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Izvestia Vuzov. Math., 8, 32—38 (1980) (in Russian).

5. *Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.:* The Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of a Cayley algebra // Russian Mathematical Surveys, **49**:1, 223—224 (1994).

6. *Banaru, M.B.:* Hermitian geometry of 6-dimensional submanifolds of the Cayley algebra. Math. Sbornik. **193**:5—6, 635—648 (2002).

7. *Banaru, M.B.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. Journal of Mathematical Sciences (New York). **207**:3, 354—388 (2015).

8. *Stepanova, L.V.:* Contact geometry of hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds. PhD thesis. Moscow (1995) (in Russian).

9. *Banaru, M.B.:* Almost contact metric hypersurfaces with type number 0 or 1 in nearly-Kählerian manifolds. Moscow University Mathematics Bulletin, **69**:3, 132—134 (2014).