$$\eta = -\omega(\bar\eta) = -\frac{1}{2}\left[\frac{(k_1)^3}{k_1'}\bar\tau_1 + \frac{(k_2)^3}{k_2'}\bar\tau_2\right].$$

4) Поверхности $M, \bar M$ зададим уравнениями

$$M:\ \tau = (u, v, 2uv, u^2 - v^2),$$

$$\bar M:\ \bar\tau = (-2uv(u-v) - \tfrac{2}{3}u^3 - \tfrac{2}{3}v^3,\quad 2uv(u+v) - \tfrac{2}{3}u^3 - \tfrac{2}{3}v^3,\ -uv + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{2}v^2,\quad uv + \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}v^2).$$

Имеем

$$\tau_1 = (1, 0, 2v, 2u),\quad \tau_2 = (0, 1, 2u, -2v),$$

$$g_{ij} = e\delta_{ij},\quad e = 1 + 4u^2 + 4v^2,$$

$$\bar\tau_1 = \omega\tau_1 = (u-v)n_1 + (u+v)n_2,$$

$$\bar\tau_2 = \omega\tau_2 = -(u+v)n_1 + (u-v)n_2,$$

$$n_1 = (-2v, -2u, 1, 0),\quad n_2 = (-2u, 2v, 0, 1),$$

$$\langle n_i, n_j\rangle = e\delta_{ij},\quad \bar g_{ij} = \bar e g_{ij},\quad \bar e = e(u^2+v^2).$$

Отображение $f: M \to \bar M$ конформное. В базисе τ_i, $\omega\tau_i$ имеем

$$\bar\alpha_1 = \frac{2}{e}\begin{bmatrix} u+v & v-u \\ v-u & -u-v \end{bmatrix},\quad \bar\alpha^2 = \frac{2}{e}\begin{bmatrix} v-u & -u-v \\ -u-v & u-v \end{bmatrix},$$

$$\underset{\tau_k}{\bar A}{}^j_i = \frac{e}{\bar e}\alpha^k_{ij},\quad tr\underset{\tau_k}{\bar A} = 0,\quad \underset{\bar\tau_k}{A}{}^j_i = \frac{\bar e}{e}\alpha^k_{ij},\quad tr\underset{\bar\tau_k}{A} = 0,$$

$$\alpha^1 = \frac{2}{\bar e}\begin{bmatrix} u+v & u-v \\ u-v & -u-v \end{bmatrix},\quad \alpha^2 = \frac{2}{\bar e}\begin{bmatrix} u-v & -u-v \\ -u-v & v-u \end{bmatrix}.$$

Обе поверхности $M, \bar M$ минимальные.

Библиографический список

I. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, I98I. Т.2. 4I2 с.

2. Cheskova M.A. On geometry of the ortogonal surfaces // Webs & Quasigroups. Tver, 1993. P. 78-82.

3. Б а з ы л е в В.Т. Геометрия дифференцируемых многообразий. М.: Высш. шк., I989. 224 с.

4. Б е с с е А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, I990. 703 с.

УДК 514.76

ОСНАЩЕНИЯ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ГОЛОНОМНОГО И НЕГОЛОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Ю.И.Ш е в ч е н к о

(Калининградский государственный университет)

Для подмногообразия дифференцируемого многообразия в голономном и неголономном случаях введены и исследованы прикасающиеся пространства, ассоциированное главное расслоение и оснащения. Показано, что оснащения играют разные роли: эквивалентны связностям, индуцируют связности, сводят связность к подсвязности, порождаются связностями и другими оснащениями.

I. Дифференцируемые многообразия. Рассмотрим локально n-мерное многообразие V_n некоторого класса дифференцируемости. Смещение ∂x любой точки $x \in V_n$ с точностью до бесконечно малых I-го порядка лежит в касательном n-пространстве T_n к многообразию V_n в точке x [1, с.162], [2, с.54], [3, с.49]:

$$\partial x = \omega^{\mathcal I} e_{\mathcal I} \quad (\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = \overline{1,n}), \tag{I}$$

где $e_{\mathcal I}$ – базисные векторы линейного пространства T_n, $\omega^{\mathcal I}$ – структурные формы многообразия V_n. Формы $\omega^{\mathcal I}$ удовлетворяют структурным уравнениям Лаптева [1]:

$$D\omega^{\mathcal I} = \omega^{\mathcal J} \wedge \omega^{\mathcal I}_{\mathcal J}, \tag{2}$$

где D – знак внешнего дифференциала.

Предполагая, что

$$D(\partial x) = 0, \tag{3}$$

продифференцируем внешним образом уравнение (I) и разрешим по лемме Картана:

$$\partial e_{\mathcal I} = \omega^{\mathcal J}_{\mathcal I} e_{\mathcal J} + \omega^{\mathcal J} e_{\mathcal{I}\mathcal{J}}, \tag{4}$$

где новые векторы $e_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$, принадлежащие соприкасающемуся пространству $T(n) \supset T_n$, симметричны:

$$e_{[\mathcal{I}\mathcal{J}]} = 0, \tag{5}$$

причем квадратные скобки обозначают альтернирование.

Дифференцируя уравнения (2) внешним образом и разрешая по обобщенной лемме Картана [1], получим

$$\mathcal{D}\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \omega^K \wedge \omega^I_{JK}, \qquad (6)$$

причем

$$\omega^I_{JK} \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0. \qquad (7)$$

Если формы ω^I_{JK} симметричны по нижним индексам:

$$\omega^I_{[JK]} = 0, \qquad (8)$$

то условия (7) выполняются. В силу доказательства Лаптева [I] обобщенной леммы Картана условия (7) могут быть справедливы при невыполнении равенств (8), что соответствует неголономному дифференцируемому многообразию [4].

Предполагая, что

$$\mathcal{D}(\partial e_I) = 0, \qquad (9)$$

продолжим уравнения (4):

$$\partial e_{IJ} = \omega^K_{IJ} e_K + \omega^K_I e_{KJ} + \omega^K_J e_{IK} + \omega^K e_{IJK}, \qquad (I0)$$

причем

$$e_{I[JK]} = 0. \qquad (II)$$

Из условий (5) и уравнений (I0) следует

$$\omega^K_{[IJ]} e_K + \omega^K e_{[IJ]K} = 0,$$

откуда вытекают равенства (8) и следующие: $e_{[IJ]K} = 0$. Последние вместе с равенствами (II) дают симметричность векторов e_{IJK} по всем индексам [1], [2], что характерно для голономного многообразия [4]. В случае неголономного многообразия равенства (3), (9) не выполняются, поэтому векторы e_{IJ}, e_{IJK} не симметричны. Обозначения для голономного и неголономного случаев различать не будем, но для отличия в неголономном случае будем писать Dim вместо $\dim$. Таким образом [5, с.20],

$$\mathrm{Dim}\, T(n) = n(1+n), \quad \dim T(n) = \tfrac{1}{2} n(n+3).$$

З а м е ч а н и я: I) Г.Ф.Лаптев [1] и Ю.Г.Лумисте [5], [6] разными способами показали инвариантность совокупности структурных форм ω^I, поэтому наш локальный подход дает результаты, имеющие глобальный характер; 2) Г.Ф.Лаптев [1] и М.А.Акивис [2] фактически доказали голономность обычного дифференцируемого многообразия; А.К.Рыбников [7] впервые исследовал, по существу, неголономное дифференцируемое многообразие; 3) в голономном случае соприкасающееся пространство $T(n)$ является слоем касательного расслоения (2-го порядка) Лаптева [1]. отличного от соответствующего расслоения Вагнера [8]; 4) в неголономном случае пространство $T(n)$ есть слой касательного расслоения А.К.Рыбникова [7], обобщающего расслоение Лаптева, но не совпадающего с расслоением Эресмана [9], называемого также неголономным соприкасающимся сверхвекторным расслоением [5].

<u>2. Пространство аффинной связности.</u> Над многообразием V_n имеется так называемое главное расслоение реперов $L_{n^2}(V_n)$ со структурными уравнениями (2), (6), типовым слоем которого является линейная группа $L_{n^2} = GL(n)$, действующая в касательном пространстве T_n. Согласно способу Лаптева, линейная (в классической терминологии - аффинная) связность в расслоении $L_{n^2}(V_n)$ задается [3, с.64] с помощью форм $\Omega^I_J = \omega^I_J - \Gamma^I_{JK}\omega^K$, причем компоненты объекта связности Γ^I_{JK} удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla\Gamma^I_{JK} + \omega^I_{JK} = \Gamma^I_{JKL}\omega^L, \qquad (I2)$$

где

$$\nabla\Gamma^I_{JK} = \partial\Gamma^I_{JK} - \Gamma^I_{JL}\omega^L_K - \Gamma^I_{LK}\omega^L_J + \Gamma^L_{JK}\omega^I_L.$$

Для единообразия описания линейных связностей голономного и неголономного дифференцируемых многообразий ограничимся в голономном случае симметрической связностью ($\Gamma^I_{[JK]} = 0$). В неголономном случае линейная связность всегда несимметрическая [4]. Вводя формы связности Ω^I_J в уравнения (4), получим

$$\partial e_I = \Omega^J_I e_J + \omega^J E_{IJ}, \qquad (I3)$$

где

$$E_{IJ} = e_{IJ} + \Gamma^K_{IJ} e_K. \qquad (I4)$$

Эти векторы удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида $\nabla E_{IJ} = \omega^K E_{IJK}$, т.е. их совокупность инвариантна в каждой точке $x \in V_n$. Векторы E_{IJ} определяют оснащающее пространство E, составляющее в прямой сумме с касательным пространством T_n соприкасающееся пространство $T(n)$:

$$T_n \oplus E = T(n), \quad \mathrm{Dim}\, E = n^2, \quad \dim E = \tfrac{1}{2} n(n+1).$$

Выражения (I4) показывают, что задание поля оснащающих пространств E эквивалентно [7], [10] заданию линейной связности. Из уравнений (I3) видно, что линейная связность с объектом Γ^I_{JK} интерпретируется внутри соприкасающегося пространства $T(n)$ с помощью проекции смежного касательного пространства $T_n + \partial T_n$ на исходное пространство T_n параллельно оснащающему пространству E , в символической записи

$$\Gamma^J_{JK}:\ T_n + \partial T_n \xrightarrow{E} T_n .$$

Многообразие V_n с заданной линейной связностью традиционно называется пространством аффинной связности A_n .

З а м е ч а н и я: 5) оснащающее пространство E А.К.Рыбников называет обобщенной нормалью [7] в неголономном случае и главной нормалью [10] или нормалью [11] в голономном случае; 6) аффинная связность определяет [1, с.168] инфинитезимальные отображения касательных пространств многообразия, этим отображениям дан геометрический смысл с помощью нормали А.К.Рыбникова E .

3. Подмногообразие. Пусть в многообразии V_n дано подмногообразие V_m . Разобьем значения индексов

$$J = (i,a);\quad i,j,k = \overline{1,m};\qquad a,b,c = \overline{m+1,n} .$$

Дифференциальные уравнения подмногообразия V_m запишем в виде

$$\omega^a = \Lambda^a_i\,\omega^i . \tag{15}$$

Продолжая их, найдем

$$\nabla\Lambda^a_i - \Lambda^a_j\Lambda^b_i\,\omega^j_b + \omega^a_i = \Lambda^a_{ij}\,\omega^j \qquad (\Lambda^a_{[ij]} = 0), \tag{16}$$

причем дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla\Lambda^a_i = d\Lambda^a_i - \Lambda^a_j\,\omega^j_i + \Lambda^b_i\,\omega^a_b \qquad (d = \partial|_{V_m}) .$$

Запишем структурные уравнения базисных форм ω^i подмногообразия V_m :

$$D\omega^i = \omega^j\wedge\theta^i_j \qquad (\theta^i_j = \omega^i_j + \Lambda^a_j\,\omega^i_a) . \tag{17}$$

Продолжая их, получим

$$D\theta^i_j = \theta^k_j\wedge\theta^i_k + \omega^k\wedge\theta^i_{jk} ,$$

где

$$\theta^i_{jk} = \omega^i_{jk} + \Lambda^a_{jk}\,\omega^i_a + \Lambda^a_j\,\omega^i_{ak} + \Lambda^a_k\,\omega^i_{ja} + \Lambda^a_k\Lambda^b_j\,\omega^i_{ba} . \tag{18}$$

Если формы $\omega^i_{jk}, \omega^i_{ja}, \omega^i_{ab}$ симметричны по нижним индексам, то из выражений (18) следует симметричность форм θ^i_{jk} по индексам j,k . Вероятно, аналогичный результат будет при дальнейших продолжениях.

Г и п о т е з а. Подмногообразие V_m голономного (неголономного) многообразия V_n является голономным (неголономным)

дифференцируемым многообразием.

Уравнения (6) на подмногообразии V_m принимают вид

$$D\omega^J_J = \omega^K_J\wedge\omega^J_K + \omega^i\wedge\vartheta^J_{Ji} \qquad (\vartheta^J_{Ji} = \omega^J_{Ji} + \Lambda^a_i\,\omega^J_{Ja}) . \tag{19}$$

Получили сужение $L_{n^2}(V_m)$ расслоения реперов $L_{n^2}(V_n)$ на подмногообразие $V_m\subset V_n$. Линейная связность в главном расслоении $L_{n^2}(V_m)$ со структурными уравнениями (17), (19) задается полем объекта L^J_{Ji} на базе V_m :

$$\nabla L^J_{J(i)} + \vartheta^J_{Ji} = L^J_{Jij}\,\omega^j , \tag{20}$$

где

$$\nabla L^J_{J(i)} = dL^J_{Ji} - L^J_{Jj}\,\theta^j_i - L^J_{Ki}\,\omega^K_J + L^K_{Ji}\,\omega^J_K .$$

Т е о р е м а 1. Связность расслоения реперов $L_{n^2}(V_n)$ над многообразием V_n порождает связность в сужении $L_{n^2}(V_m)$ этого расслоения на подмногообразие V_m . Иначе говоря, если V_m – подмногообразие пространства аффинной связности A_n , то в расслоении $L_{n^2}(V_m)\subset L_{n^2}(A_n)$ возникает внутренняя связность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем уравнения (12) подробнее и ограничим их на подмногообразие V_m :

$$\nabla\Gamma^J_{Ji} - \Gamma^J_{Ja}\,\omega^a_i + \omega^J_{Ji} = (\Gamma^J_{Jij} + \Gamma^J_{Jia}\Lambda^a_j)\,\omega^j ,$$

$$\nabla\Gamma^J_{Ja} - \Gamma^J_{Ji}\,\omega^i_a + \omega^J_{Ja} = (\Gamma^J_{Jai} + \Gamma^J_{Jab}\Lambda^b_i)\,\omega^i .$$

Уравнения (20) преобразуем к виду

$$\nabla L^J_{Ji} - L^J_{Jj}\Lambda^a_i\,\omega^j_a + \vartheta^J_{Ji} = L^J_{Jij}\,\omega^j .$$

Объект связности L^J_{Ji} охватывается объектом связности Γ^J_{JK} и фундаментальным объектом Λ^a_i подмногообразия V_m по формуле

$$L^J_{Ji} = [\Gamma^J_{Ji} + \Lambda^a_i\,\Gamma^J_{Ja}]_{V_m}$$

4. Прикасающиеся пространства. Уравнение (1) для точки $x\in V_m$, смещающейся вдоль подмногообразия V_m , принимает вид

$$dx = \omega^i\varepsilon_i \qquad (\varepsilon_i = e_i + \Lambda^a_i e_a) .$$

Векторы ε_i удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla\varepsilon_i - \Lambda^a_i\,\omega^j_a\,\varepsilon_j = \omega^j\varepsilon_{ij} , \tag{21}$$

где

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \Lambda^a_{ij}e_a + \Lambda^a_i e_{aj} + \Lambda^a_j e_{ia} + \Lambda^a_i\Lambda^b_j e_{ab} . \tag{22}$$

Совокупность векторов ε_i инвариантна и определяет касательное подпространство $T_m\subset T_n$ к подмногообразию V_m в точке x . Произведем частичную канонизацию подвижного репера $\{e_i, e_a\}$ касательного пространства T_n, помещая векторы e_i в касательное подпространство T_m. Тогда $\Lambda^a_i = 0$, $\varepsilon_i = e_i$ и соотношения (I5), (I6), (2I), (22) упрощаются:

$$\omega^a = 0, \qquad \omega^a_i = \Lambda^a_{ij}\,\omega^j; \tag{23}$$

$$\nabla e_i = \omega^j \varepsilon_{ij} \qquad (\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \Lambda^a_{ij} e_a). \tag{24}$$

Продолжая вторую подсистему системы (23), найдем $\nabla \Lambda^a_{ij} + \omega^a_{ij} \equiv 0$, где знак $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^k. Векторы ε_{ij} удовлетворяют сравнениям

$$\nabla \varepsilon_{ij} - \theta^k_{ij} e_k \equiv 0 \qquad (\theta^k_{ij} = \omega^k_{ij} + \Lambda^a_{ij}\,\omega^k_a),$$

т.е. инвариантны лишь вместе с векторами e_k. Совокупность векторов $\{\varepsilon_{ij}, e_k\}$ определяет соприкасающееся подпространство $T(m)$ к подмногообразию V_m в точке x.

Из уравнений (4), (I0), (23) получим

$$\begin{cases} \nabla e_a \equiv \omega^i_a e_i, \quad \nabla e_{ij} \equiv \omega^k_{ij} e_k + \omega^a_{ij} e_a, \\ \nabla e_{ai} \equiv \omega^j_{ai} e_j + \omega^b_{ai} e_b + \omega^j_a e_{ji}, \ \nabla e_{ia} \equiv \omega^j_{ia} e_j + \omega^b_{ia} e_b + \omega^j_a e_{ij}, \end{cases} \tag{25}$$

откуда следует инвариантность совокупностей векторов

$\{e_i, e_a, e_{ij}\}$, $\{e_i, e_a, e_{ij}, e_{ai}\}$, $\{e_i, e_a, e_{ij}, e_{ia}\}$, $\{e_i, e_a, e_{ij}, e_{ai}, e_{ia}\}$.

Обозначим натянутые на них подпространства A, B, B', C соответственно. В неголономном случае имеем

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & T_n \arrow[dr, phantom, "\subset"] & & B \arrow[dr, phantom, "\subset"] & & \\ T_m \arrow[ur, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & & A \arrow[ur, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & & C \subset T(n); \\ & T(m) \arrow[ur, phantom, "\subset"] & & B' \arrow[ur, phantom, "\subset"] & \end{tikzcd}$$

$T_n \cap T(m) = T_m$, $T_n + T(m) = A$, $B \cap B' = A$, $B + B' = C$;
$\mathrm{Dim}\, A = n + m^2$, $\mathrm{Dim}\, B = \mathrm{Dim}\, B' = n(m+1)$, $\mathrm{Dim}\, C = n + m(2n-m)$.
В голономном случае цепочка включений упрощается, т.к. $A \subset B = B' = C$, причем

$$\dim A = n + \tfrac{1}{2} m(m+1), \quad \dim B = n + \tfrac{1}{2} m(2n-m+1).$$

Выясним геометрическую характеристику пространств A, B, B', C. Предварительно найдем 2-й дифференциал точки $x \in V_n$ вдоль многообразия V_n:

$$\partial^2 x = \partial(\omega^J e_J) = (\partial\omega^J + \omega^{J}\omega^J_J) e_J + \omega^J \omega^J e_{JJ} \in T(n) = [T_n + \partial T_n],$$

т.е. соприкасающееся пространство $T(n)$ является линейной оболочкой множества пространств $T_n + \partial T_n$, смежных с касательным пространством T_n. Аналогично, вдоль подмногообразия V_m:

$$d^2 x = d(\omega^i e_i) = (d\omega^i + \omega^j \omega^i_j) e_i + \omega^i \omega^j \varepsilon_{ij} \in T(m) = [T_m + dT_m],$$

т.е. соприкасающееся подпространство $T(m)$ есть оболочка подпространств $T_m + dT_m$, смежных с касательным подпространством T_m вдоль подмногообразия V_m. Для смещений 2-го порядка возможны еще два варианта. Во-первых,

$$d(\partial x) = d(\omega^i e_i + \omega^a e_a) = (d\omega^i + \omega^j \omega^i_j + \omega^a \omega^i_a) e_i +$$
$$+ (d\omega^a + \omega^b \omega^a_b) e_a + \omega^i \omega^j \varepsilon_{ij} + \omega^a \omega^i e_{ai} \in B = [T_n + dT_n]$$

– оболочка пространств $T_n + dT_n$, смежных касательному пространству T_n вдоль подмногообразия V_m. Во-вторых,

$$\partial(dx) = \partial(\omega^i e_i) = (\partial\omega^i + \omega^j \omega^i_j) e_i + \omega^i(\omega^a_i e_a + \omega^j e_{ij} + \omega^a e_{ia}) \in B' = [T_m + \partial T_m]$$

– оболочка подпространств $T_m + \partial T_m$, смежных к касательному подпространству T_m вдоль многообразия V_n. Пространства $B = T(n,m)$, $B' = T(m,n)$ назовем прикасающимися. Каждое прикасающееся пространство содержит соприкасающееся подпространство $T(m)$ и включается в соприкасающееся пространство $T(n)$, причем

$$A = T(n,m) \cap T(m,n), \quad C = T(n,m) + T(m,n).$$

В пространстве аффинной связности A_n возникают оснащающие подпространства:

$$A_0 = A \cap E, \quad B_0 = B \cap E, \quad B'_0 = B' \cap E, \quad C_0 = C \cap E.$$

Для неголономного пространства A_n имеем

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny, row sep=tiny] & B_0 \arrow[dr, phantom, "\subset"] & \\ A_0 \arrow[ur, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & & C_0, \\ & B'_0 \arrow[ur, phantom, "\subset"] & \end{tikzcd} \quad \mathrm{Dim}\, A_0 = m^2, \ \mathrm{Dim}\, B_0 = \mathrm{Dim}\, B'_0 = mn, \ \mathrm{Dim}\, C_0 = m(2n-m).$$

Для голономного пространства A_n: $A_0 \subset B_0 = B'_0 = C_0$,

$$\dim A_0 = \tfrac{1}{2} m(m+1), \quad \dim B_0 = \tfrac{1}{2} m(2n-m+1).$$

З а м е ч а н и е: 7) подпространство A_0 является нормалью А.К.Рыбникова для подмногообразия V_m, она построена без помощи опорных плоскостей (ср. [10, с.48]), поэтому для определения аффинной связности на подмногообразии $V_m \subset A_n$ задавать поле опор не обязательно (ср. [11, с.285]).

5. Ассоциированное расслоение. Структурные уравнения (I7), (I9) расслоения $L_{n^2}(V_m)$ с учетом дифференциальных уравнений

(23) подмногообразия V_m принимают вид

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \qquad (26)$$

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \theta^i_{jk}, \qquad (27)$$

$$D\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \omega^i \wedge \theta^a_{bi} \quad (\theta^a_{bi} = \omega^a_{bi} - \Lambda^a_{ji}\omega^j_b), \qquad (28)$$

$$D\omega^i_a = \omega^j_a \wedge \omega^i_j + \omega^b_a \wedge \omega^i_b + \omega^j \wedge \omega^i_{aj}. \qquad (29)$$

Расслоение $L_{n^2}(V_m)$ сокращается до главного расслоения $G(V_m)$ с типовым слоем – $(m^2 - mn + n^2)$ -членной подгруппой стационарности $G \subset L_{n^2}$ касательного подпространства T_m в касательном пространстве T_n. Расслоение $G(V_m)$ содержит три подрасслоения с той же базой V_m:

1) расслоение касательных реперов $L_{m^2}(V_m)$ – главное расслоение (26), (27), типовой слой – линейная группа $L_{m^2} = GL(m) \subset G$, действующая в касательном подпространстве T_m;

2) расслоение нормальных реперов $L_{(n-m)^2}(V_m)$ – главное расслоение (26), (28), типовой слой – линейная фактор-группа $L_{(n-m)^2} = GL(n-m)$, действующая в фактор-пространстве T_n/T_m, называемом нормальным пространством (см., например, [12, с.116]);

3) составное многообразие $\mathcal{M}_{m(n-m)}(V_m)$ со структурными уравнениями (26), (29), являющееся однородным расслоением с типовым слоем $\mathcal{M}_{m(n-m)} = G/(L_{m^2} \times L_{(n-m)^2})$, который геометрически представляется грассмановым многообразием $\mathcal{M}_{m(n-m)} = Gr(n-m, n)$ подпространств размерности $n-m$ в касательном пространстве T_n, пересекающихся с пространством T_m лишь по нуль-вектору.

Фундаментально-групповая связность в главном расслоении $G(V_m)$ со структурными уравнениями (26) – (29) задается по Лаптеву [3, с.63, 83] с помощью форм

$$\Omega^i_j = \omega^i_j - \Pi^i_{jk}\omega^k, \quad \Omega^a_b = \omega^a_b - \Pi^a_{bi}\omega^i, \quad \Omega^i_a = \omega^i_a - \Pi^i_{aj}\omega^j, \qquad (30)$$

причем компоненты объекта связности $\{\Pi^i_{jk}, \Pi^a_{bi}, \Pi^i_{aj}\}$ удовлетворяют сравнениям:

$$\nabla\Pi^i_{jk} + \theta^i_{jk} \equiv 0, \quad \nabla\Pi^a_{bi} + \theta^a_{bi} \equiv 0, \quad \nabla\Pi^i_{aj} - \Pi^i_{kj}\omega^k_a + \Pi^b_{aj}\omega^i_b + \omega^i_{aj} \equiv 0. \qquad (31)$$

Подобъекты Π^i_{jk} и Π^a_{bi} задают линейные связности в расслоениях касательных и нормальных реперов. Назовем их касательной и нормальной связностями, а связность в ассоциированном с подмногообразием V_m расслоении $G(V_m)$ – G-связностью.

Т е о р е м а 2. Если отождествить компоненты фундаментального объекта Λ^a_{ij} подмногообразия V_m и ограничения $\Gamma^a_{ij}|_{V_m}$ соответствующих компонент объекта связности Γ^J_{JK}, то линейная связность расслоения $L_{n^2}(V_n)$ порождает фундаментально-групповую связность в расслоении $G(V_m)$, ассоциированном с подмногообразием V_m. Короче говоря, если V_m – подмногообразие пространства аффинной связности A_n, то при надлежащем отождествлении в ассоциированном расслоении $G(V_m) \subset L_{n^2}(A_n)$ возникает внутренняя связность.

Действительно, при $\Lambda^a_{ij} = \Gamma^a_{ij}|_{V_m}$ можно положить

$$\Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}|_{V_m}, \quad \Pi^a_{bi} = \Gamma^a_{bi}|_{V_m}, \quad \Pi^i_{aj} = \Gamma^i_{aj}|_{V_m}.$$

С л е д с т в и е. Если $\Lambda^a_{ij} = \Gamma^a_{ij}|_{V_m}$, то подмногообразие V_m пространства аффинной связности A_n является подпространством аффинной связности A_m.

6. Нормализация. Под нормализацией подмногообразия $V_m \subset V_n$ понимают (см., например, [12, с.221]) присоединение к каждой точке $x \in V_m$ пространства N_{n-m}, дополняющего касательное подпространство T_m до касательного пространства T_n. Нормализованное подмногообразие V_m обозначим NV_m. Пространство N_{n-m} зададим векторами $N_a = e_a + \lambda^i_a e_i$. Преобразуем их с помощью оператора ∇ : $\nabla N_a \equiv (\nabla\lambda^i_a + \omega^i_a) e_i$, откуда вытекают дифференциальные уравнения

$$\nabla\lambda^i_a + \omega^i_a = \lambda^i_{aj}\omega^j, \qquad (32)$$

обеспечивающие инвариантность совокупности векторов N_a. Продолжая их, найдем

$$\nabla\lambda^i_{aj} - \lambda^i_b\theta^b_{aj} + \lambda^k_a\theta^i_{kj} + \omega^i_{aj} \equiv 0. \qquad (33)$$

Из соотношений (31) – (33) следует формула

$$\Pi^i_{aj} = \lambda^i_{aj} + \lambda^i_b\Pi^b_{aj} - \lambda^k_a\Pi^i_{kj} \qquad (34)$$

Т е о р е м а 3. Нормализация подмногообразия $V_m \subset V_n$ полем пространств N_{n-m} $(T_m \oplus N_{n-m} = T_n)$ сводит G-связность к касательной и нормальной связностям.

Если G-связность порождена двумя линейными связностями с помощью нормализации по формуле (34), то назовем ее нормализованной G-связностью или NG-связностью.

Вводя в уравнения (32) формы G-связности (30), получим $D\lambda^i_a = \lambda^i_{a|j}\omega^j$, где

$$D\lambda^i_a = d\lambda^i_a - \lambda^i_b\Omega^b_a + \lambda^j_a\Omega^i_j + \Omega^i_a, \quad \lambda^i_{a|j} = \lambda^i_{aj} + \lambda^i_b\Pi^b_{aj} - \lambda^k_a\Pi^i_{kj} - \Pi^i_{aj}.$$

– ковариантные дифференциал и производные нормализующего объекта λ^i_a относительно G-связности [13]. Равенства $\lambda^i_{a|j}=0$ дают формулу (34).

Т е о р е м а 4. Поле нормализующего квазитензора абсолютно параллельно в нормализованной G-связности, иначе говоря, нормаль N_{n-m} из точки $x\in V_m$ переносится параллельно относительно NG-связности вдоль любой кривой подмногообразия V_m, проходящей через точку x.

7. Оснащения, эквивалентные связностям. Запишем подробно уравнения (24) и первую подсистему сравнений (25):

$$de_i=\omega^j_i e_j+\omega^j\varepsilon_{ij},\quad de_a=\omega^b_a e_b+\omega^i_a e_i+\omega^i e_{ai}.$$

Введем в них формы G-связности (30):

$$de_i=\Omega^j_i e_j+\omega^j\mathcal{E}_{ij},\quad de_a=\Omega^b_a e_b+\Omega^i_a e_i+\omega^i\mathcal{E}_{ai},$$

где

$$\mathcal{E}_{ij}=\varepsilon_{ij}+\Pi^k_{ij}e_k,\quad \mathcal{E}_{ai}=e_{ai}+\Pi^b_{ai}e_b+\Pi^j_{ai}e_j. \qquad (35)$$

Эти векторы удовлетворяют сравнениям

$$\nabla\mathcal{E}_{ij}=0,\quad \nabla\mathcal{E}_{ai}-\omega^j_a\mathcal{E}_{ji}\equiv 0, \qquad (36)$$

поэтому инвариантны в совокупности и определяют пространство B_* типа B_o, дополняющее касательное пространство T_n до прикасающегося пространства $T(n,m)$. Из сравнений (36) видно, что векторы $\mathcal{E}_{ij}$ задают подпространство $A_*\subset B_*$ типа A_o, дополняющее касательное подпространство T_m до соприкасающегося подпространства $T(m)$.

Т е о р е м а 5. Оснащение подмногообразия $V_m\subset V_n$ полем пространств B_* $(B_*\oplus T_n=T(n,m))$, содержащих подпространства A_* $(A_*\oplus T_m=T(m))$, эквивалентно заданию G-связности, которая характеризуется внутри прикасающегося пространства $T(n,m)$ с помощью проекции

$$\{\Pi^i_{jk},\Pi^a_{bi},\Pi^i_{aj}\}:\ T_n+dT_n\xrightarrow{B_*}T_n,$$

причем касательная связность, эквивалентная полю подпространств A_*, интерпретируется самостоятельно в соприкасающемся подпространстве

$$\Pi^i_{jk}:\ T_m+dT_m\xrightarrow{A_*}T_m.$$

Векторы N_a, определяющие нормаль N_{n-m}, удовлетворяют

дифференциальным уравнениям

$$dN_a=\omega^b_a N_b+\omega^i N_{ai}, \qquad (37)$$

где

$$N_{ai}=e_{ai}+\lambda^j_a\varepsilon_{ji}+\lambda^j_{ai}e_j\qquad (\nabla N_{ai}\equiv\theta^b_{ai}N_b).$$

Совокупность векторов $\{N_{ai},N_a\}$ инвариантна и задает продолженную нормаль $N_{(m+1)(n-m)}\supset N_{n-m}$, дополняющую соприкасающееся подпространство $T(m)$ до прикасающегося пространства $T(n,m)$. Введем в уравнения (37) формы нормальной связности:

$$dN_a=\Omega^b_a N_b+\omega^i\mathcal{U}_{ai},\quad \mathcal{U}_{ai}=N_{ai}+\Pi^b_{ai}N_b,\quad \nabla\mathcal{U}_{ai}\equiv 0.$$

Совокупность **векторов** $\mathcal{U}_{ai}$ инвариантна и определяет подпространство

$$\mathcal{U}_{m(n-m)}:\ N_{n-m}\oplus\mathcal{U}_{m(n-m)}=N_{(m+1)(n-m)},$$

которое назовем дополнением нормали.

Т е о р е м а 6. Оснащение нормализованного подмногообразия NV_m полем дополнений нормалей $\mathcal{U}_{m(n-m)}$ эквивалентно заданию нормальной связности и позволяет интерпретировать ее внутри продолженной нормали $N_{(m+1)(n-m)}$

$$\Pi^a_{bi}:\ N_{n-m}+dN_{n-m}\xrightarrow{\mathcal{U}_{m(n-m)}}N_{n-m}.$$

С л е д с т в и е (Т.3, Т.5, Т.6). Оснащение нормализованного подмногообразия NV_m полями подпространств A_* и $\mathcal{U}_{m(n-m)}$ индуцирует NG-связность.

З а м е ч а н и е : 8) дополнительное оснащение [11, с.286] подмногообразия V_m можно не производить, т.к. построено трансопорное подпространство $N_{(m+1)(n-m)}$, а в качестве транскасательного подпространства можно взять соприкасающееся подпространство $T(m)$.

8. Индуцированные связности. Рассмотрим векторы $F_{ai}=e_{ai}+\mu^b_{ai}e_b$ и преобразуем их по формуле

$$\nabla F_{ai}\equiv\omega^j_a\mathcal{E}_{ji}+(\nabla\mu^b_{ai}+\theta^b_{ai})e_b+(\mu^b_{ai}\omega^j_b-\Pi^j_{ki}\omega^k_a+\omega^j_{ai})e_j.$$

При выполнении сравнений $\nabla\mu^b_{ai}+\theta^b_{ai}\equiv 0$ инвариантна совокупность векторов $\{F_{ai},\mathcal{E}_{ij},e_i\}$, задающая пространство F $(T(m)\subset F\subset B$, $F\cap T_n=T_m)$ с размерностью:

$$\mathcal{D}im\,F=m\,(n+1),\quad \dim F=\tfrac{1}{2}m\,(2n-m+3).$$

Имеем:

$$F_{ai}=\mathcal{E}_{ai}+(\mu^b_{ai}-\Pi^b_{ai})e_b-\Pi^j_{ai}e_j,$$

16*

т.е. $F=T_m\oplus B_*$, если $\mu^b_{ai}=\Pi^b_{ai}$ – функции μ^b_{ai} входят в состав коэффициентов разложений векторов (35), определяющих подпространство B_* .

Т е о р е м а 7. Оснащение подмногообразия V_m полем пространств $F\,(A+F=B,\ A\cap F=T(m))$ позволяет задать нормальную связность:

$$\Pi^a_{bi}=\mu^a_{bi}. \qquad (38)$$

С л е д с т в и е (Т.3, Т.5, Т.7). $F\cup A_*$ – оснащение нормализованного подмногообразия NV_m индуцирует NG-связность.

Возьмем векторы $v_{ij}=e_{ij}+\mu^k_{ij}e_k$ и выполним преобразование:

$$\nabla v_{ij}\equiv\omega^a_{ij}N_a+(\nabla\mu^k_{ij}-\lambda^k_a\omega^a_{ij}+\omega^k_{ij})e_k$$

Если выполняются сравнения

$$\nabla\mu^k_{ij}-\lambda^k_a\omega^a_{ij}+\omega^k_{ij}\equiv 0,$$

то инвариантна совокупность векторов $\{v_{ij},N_a\}$. На них натянуто пространство $\mathcal{V}$, пересекающее касательное пространство T_n по нормали N_{n-m} и имеющее размерность:

$$\mathrm{Dim}\,\mathcal{V}=m^2+n-m,\quad \dim\mathcal{V}=n+\tfrac{1}{2}m(m-1).$$

Имеем:

$$v_{ij}=\mathcal{E}_{ij}-\Lambda^a_{ij}N_a+(\mu^k_{ij}+\Lambda^a_{ij}\lambda^k_a-\Pi^k_{ij})e_k,$$

т.е. $\mathcal{V}=N_{n-m}\oplus A_*$, если

$$\mu^k_{ij}=\Pi^k_{ij}-\Lambda^a_{ij}\lambda^k_a. \qquad (39)$$

Т е о р е м а 8. $\mathcal{V}$-оснащение нормализованного подмногообразия NV_m дает возможность задать касательную связность:

$$\Pi^i_{jk}=\mu^i_{jk}+\Lambda^a_{jk}\lambda^i_a. \qquad (40)$$

С л е д с т в и е (Т.3, Т.6, Т.8). Оснащение нормализованного подмногообразия NV_m полями пространств $\mathcal{U}_{m(n-m)}$ и $\mathcal{V}$ индуцирует NG-связность.

С л е д с т в и е (Т.3, Т.7, Т.8). $F\cup\mathcal{V}$ -оснащение нормализованного подмногообразия NV_m индуцирует NG-связность.

Рассмотрим векторы $w_{ai}=e_{ai}+\mu^j_{ai}e_j$ и преобразование:

$$\nabla w_{ai}\equiv\omega^j_a v_{ji}+\omega^b_{ai}N_b+(\nabla\mu^j_{ai}-\lambda^j_b\omega^b_{ai}-\mu^j_{ki}\omega^k_a+\omega^j_{ai})e_j.$$

Если выполняются сравнения

$$\nabla\mu^j_{ai}-\lambda^j_b\omega^b_{ai}-\mu^j_{ki}\omega^k_a+\omega^j_{ai}\equiv 0,$$

то инвариантна совокупность векторов $\{w_{ai},v_{ij},N_a\}$.

На них натянуто пространство $\mathcal{W}$, содержащее пространство $\mathcal{V}$ и имеющее размерность:

$$\mathrm{Dim}\,\mathcal{W}=mn+n-m,\quad \dim\mathcal{W}=n+\tfrac{1}{2}m(2n-m-1).$$

Имеем:

$$w_{ai}=\mathcal{E}_{ai}-\Pi^b_{ai}N_b+(\mu^j_{ai}+\Pi^b_{ai}\lambda^j_b-\Pi^j_{ai})e_j.$$

Если справедливы равенства $\mu^j_{ai}=\Pi^j_{ai}-\Pi^b_{ai}\lambda^j_b$, то векторы w_{ai} разлагаются по векторам $\mathcal{E}_{ai}, N_b$. Если, кроме того, выполняется формула (39), то $\mathcal{W}=N_{n-m}\oplus B_*$.

Т е о р е м а 9. $F\cup\mathcal{W}$ -оснащение нормализованного подмногообразия NV_m индуцирует G-связность, не являющуюся нормализованной.

Доказательство дается формулами (38), (40) и следующей:

$$\Pi^i_{aj}=\mu^i_{aj}+\lambda^i_b\mu^b_{ai}.$$

З а м е ч а н и е: 9) для подмногообразия $V_m\subset A_n$ определены оснащения с помощью полей пространств $A_*=A_0$, $B_*=B_0$, $F=T_m\oplus B_0$, кроме того, для нормализованного подмногообразия $NV_m\subset A_n$ можно взять

$$\mathcal{V}=N_{n-m}\oplus A_0,\quad \mathcal{W}=N_{n-m}\oplus B_0.$$

Библиографический список

I. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара/ ВИНИТИ. М., I966. Т.I. С.I39-I89.

2. А к и в и с М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, I977. 84 с.

3. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а н у Н.М., Ш и р о к о в А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., I979. Т.9. 248 с.

4. Ш е в ч е н к о Ю.И. Связности голономных и неголономных дифференцируемых многообразий // Дифференц. геом. многообр фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I994. Вып.25. С.II0-I2I.

5. Л у м и с т е Ю.Г. Связности в расслоенных пространств с однородными слоями. Тарту, I977. 64 с.

6. Л у м и с т е Ю.Г. Связности в однородных расслоениях // Матем. сб. I966. Т.69. С.434-469.

7. Р ы б н и к о в А.К. Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Матем. 1983. № 1. С.73-80.

8. В а г н е р В.В. Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии // Веблен О. и Уайтхед Дж. Основания дифференциальной геометрии. М., 1949. С.135-223.

9. Л у м и с т е Ю.Г. Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения p-крепперов // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.5. С.239-257.

10. Р ы б н и к о в А.К. Соприкасающиеся пространства и связности. I // Вестник МГУ. Мат., мех. 1979. № 6. С.44-48.

11. Р ы б н и к о в А.К. Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т.29. № 2. С.279-290.

12. З у л а н к е Р., В и н т г е н П. Дифференциальная геометрия и расслоения. М., 1975. 348 с.

13. Ш е в ч е н к о Ю.И. Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности // Дифференц. геом. многообр. фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.115-120.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С СЕМИКРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С.В.Ш м е л е в а

(Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота)

Получены аналитические характеристики конгруэнции линейчатых невырожденных квадрик в P_3 с семикратной фокальной поверхностью и исследован один класс таких конгруэнций - конгруэнции K_7^0. Доказано, что конгруэнции K_7^0 существуют и определяются с произволом пяти функций одного аргумента.

1. Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 конгруэнцию линейчатых невырожденных квадрик, имеющую только две фокальные поверхности - семикратную невырожденную поверхность (A_0) и однократную - (A_3), причем прямая A_0A_3 не является прямолинейной образующей квадрики Q конгруэнции. Назовем

такие конгруэнции - конгруэнциями K_7. Отнесем конгруэнцию K_7 к реперу $\{\bar{A}_\alpha\}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 0,1,2,3)$, где A_1 и A_2 - точки пересечения прямолинейных образующих квадрики $Q \in K_7$, проходящих через фокальные точки A_0 и A_3. При надлежащей нормировке вершин репера уравнение квадрики Q и система пфаффовых уравнений конгруэнции K_7 запишутся соответственно в виде:

$$\mathcal{F} \equiv x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0, \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \ \ \omega_3^0 = 0, \ \ \omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k, \ \ \omega_i^3 - \omega^j = c_{ik}\omega^k, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = \lambda_{ik}\omega^k, \ \ \omega_3^i = b_k^i \omega^k, \ \ \Omega = h_k \omega^k, \end{cases} \tag{1.2}$$

причем

$$\omega^i \stackrel{def}{=} \omega_0^i, \ \ \Omega \stackrel{def}{=} \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3;$$

$$c_{12} = c_{21}, \ \ b_1^1 \lambda_{12} - b_2^2 \lambda_{21} + b_1^2 \lambda_{22} - b_2^1 \lambda_{11} = 0, \tag{1.3}$$

$i, j, k = 1,2;$ $i \neq j$, и по индексам i и j здесь и в дальнейшем суммирование не производится.

Условия семикратности фокальной поверхности (A_0) приводятся к виду:

$$\begin{cases} c p_i = 0, \ \ c(t_j - s_j) + q_i^2 - p_i(q_j + r_j) = 0, \\ c(v_i + w_i) + p_i(s_i + t_i) + 2q_i(u_i - a) + (s_j - t_j)(q_j + r_j) = 0, \\ -\lambda c + (u_i - a)^2 + 2v_j q_i + (s_i + t_i)(t_j - s_j) - \\ -(v_i + w_i)(r_j + q_j) - p_i \ell_i = 0, \\ \lambda(r_j + q_j) + 2v_j(u_i - a) + \ell_i(s_j - t_j) + (v_i + w_i)(s_i + t_i) = 0, \\ v_j^2 - \lambda(t_i + s_i) - \ell_i(v_i + w_i) = 0; \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\lambda \ell_i \neq 0, \tag{1.5}$$

где величины $c, \lambda, p_i, q_i, r_i, \ell_i, v_i, w_i, s_i, t_i$ определены формулами (1.3) работы [1] и

$$a = a_{11}^2 a_{22}^1 - a_{12}^2 a_{21}^1, \quad u_i = c_{ij}\lambda_{ji} - c_{ii}'\lambda_{jj} \tag{1.6}$$

2. Обозначим

$$\begin{cases} \theta = \omega^1 + \omega^2, \ \ \theta_1 = \omega^2 - 2\omega^1, \ \ \theta_2 = 2\omega^2 - \omega^1, \\ m = b_2^2 - b_1^1 + \ell_2^1 - b_1^2. \end{cases} \tag{2.1}$$

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнциями K_7^0 называются конгруэнции K_7, удовлетворяющие условиям: