ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.10 1979

УДК 513.73

Б.А.А н д р е е в

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЕМ $f: P_m \to A_n$ $(m>n)$

В статье [I] изучалось распределение линейных элементов,порожденное отображением $P_{n+k} \to P_n$.Фиксация в пространстве P_n гиперплоскости π° ,т.е.замена проективного пространства P_n аффинным,приведет к появлению новых геометрических понятий и образов.Они изучаются в настоящей работе: это понятие главных точек и индикатриса - инвариантная направляющая конуса характеристических прямых.Доказано,что она определяет геометрические образы I дифференциальной окрестности рассматриваемого распределения.Дан способ их построения с помощью индикатрисы.Затронут вопрос о свойствах характеристической конфигурации в специальном случае. Используются обозначения работы [7].

Пусть $f: P_m \longrightarrow A_n$ дифференцируемое отображение из области m-мерного проективного пространства P_m в n-мерное аффинное пространство A_n $(n<m)$,пополненное несобственной гиперплоскостью π° .Ранг отображения f предполагается равным n в каждой точке области U .Поместим нулевую вершину подвижного репера пространства P_m в точку $P^\circ \in U$,а начало репера пространства A_n - в точку $P^\circ = f(P^\circ)$.

Система дифференциальных уравнений отображения f имеет вид (I.4), [7], где следует положить $\omega_i^0 \equiv 0$, а формы $\widetilde{\omega}^i \stackrel{d}{=} \omega_0^i$, $\widetilde{\omega}_i^j \stackrel{d}{=} \omega_i^j - \delta_i^j \omega_0^0$ являются структурными формами пространства A_n. Фундаментальный объект II-го порядка $\{\Lambda_J^i, \Lambda_{JK}^i\}$ отображения f подчиняется дифференциальным уравнениям (1.5) [7], где $\Lambda_{iJ} \equiv 0, \Lambda_{iJK} \equiv 0$. Разложение отображения f в степенной ряд имеет вид:

$$\widetilde{x}^i = \Lambda_J^i \widetilde{X}^J + \frac{1}{2}\Lambda_{JK}^i \widetilde{X}^J \widetilde{X}^K + (\dots),\ (i,j,\dots=1,\dots,n;\, J,K,\dots=1,\dots,m),$$

где $\widetilde{X}^J, \widetilde{x}^i$ - соответственно неоднородные координаты точек $P \subset U$ и $P = f(P) \subset A_n$ и в указанных реперах.

Отображение f порождает локальное расслоение пространства P_m на n-параметрическое семейство $(m-n)$-мерных подмногообразий $W_p = f^{-1}(p)$. Уравнения касательного подпространства L_0 к слою W_{p^0} в точке P^0 имеет в однородных координатах следующий вид:

$$\Lambda_J^i X^J = 0.$$

Можно показать, что результаты, касающиеся $K(P_\alpha)$-главных прямых [2], переносятся без изменений на случай $m > n$, если исключить из рассмотрения прямые, лежащие в L^0.

О п р е д е л е н и е 1. Точка $A \subset P_m$ называется главной, если существует касательная к отображению f коллинеация $K(P_J)$, такая, что: I/ прямая $[P^0 A]$ является $K(P_J)$-главной, 2/ $K(P_J)(A) \in \pi^0$.

Множество главных точек обозначим $\mathcal{M}$. Очевидно $\mathcal{M} K^0 = \Phi$. Объектом $\{\Lambda_J^i, \Lambda_{JK}^i\}$ для каждой точки P^0 определяется инвариантное алгебраическое многообразие $\mathcal{J}$:

$$\Lambda_{JK}^i X^J X^K - 2\Lambda_J^i X^J X^0 = 0$$

в общем случае размерности $m-n$ и порядка 2^n, которое называется индикатрисой. L^0 является касательным подпространством к индикатрисе в точке P^0. Возможны 2 случая взаимного расположения многообразий L^0 и $\mathcal{J}$: I/ L^0 и $\mathcal{J}$ как множества находятся в общем положении; 2/ $L^0 \subset \mathcal{J}$. Очевидно для "общего случая" (но не только для него) выполняется условие I). В зависимости от выполнения в точке P^0 условий I) или 2) будем относить ее соответственно к типу G или S.

П р е д л о ж е н и е 1. Справедлива формула

$$\mathcal{M} = \mathcal{J} \setminus (\mathcal{J} \cap L^0)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 из [6].

С л е д с т в и е 1. На каждой $K(P_J)$-главной прямой существует единственная точка.

С л е д с т в и е II. В общем случае имеем:

$$\mathcal{J} = \overline{\mathcal{M}},\quad \mathcal{J} \cap L^0 = \overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M},$$

где $\overline{\mathcal{M}}$ - топологическое замыкание множества $\mathcal{M}$.

Пусть χ - конус, состоящий из прямых связки $\{P^0\}$, которые а) пересекают индикатрису $\mathcal{J}$ в двух точках или б) касаются ее.

Т е о р е м а I. Конус χ состоит из характеристических прямых в смысле В.В.Рыжкова [3]. Ненулевые характеристические прямые определяются условием а), нулевые - условием б).

Доказательство проводится так же, как для теоремы 7 из [5]. Характеристическая гомография H_ℓ, заданная на характеристической прямой ℓ, при данной связке касательных коллинеаций определяется множеством $\mathfrak{M}$, а именно условием $H_\ell(A)=\pi^\circ$, где $A=\ell\cap\mathfrak{M}$.

Поместим вершины R_α $(\alpha,\ldots=n+1,\ldots,m)$ репера пространства P_m в L°. Имеем: $\Lambda^i_\alpha\equiv 0$. Пусть

$$\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma}=V^{\hat\alpha}_i\Lambda^i_{\alpha\gamma},\quad \Lambda^{\hat\alpha}_{\hat\beta\hat\gamma}=-V^{\hat\alpha}_i\Lambda^i_{\hat\beta\hat\gamma},$$

где $V^{\hat\alpha}_i$ определены равенством $V^{\hat\alpha}_i\Lambda^i_{\hat\beta}=\delta^{\hat\alpha}_{\hat\beta}$ $(\hat\alpha,\hat\beta,\ldots=1,\ldots,n)$. Из (1.5)[7] получаем:

$$\Omega^{\hat\alpha}_\alpha=\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma}\Omega^\gamma_\circ,$$

$$\overset{\circ}{\nabla}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}=0,\ \overset{\circ}{\nabla}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat\beta}=\delta^{\hat\alpha}_{\hat\beta}\Pi^\circ_\alpha+\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\Pi^\beta_{\hat\beta},\ \overset{\circ}{\nabla}\Lambda^{\hat\alpha}_{\hat\beta\hat\gamma}=\delta^{\hat\alpha}_{(\hat\beta}\Pi^\circ_{\hat\gamma)}+\Lambda^{\hat\alpha}_{\beta(\hat\beta}\Pi^\beta_{\hat\gamma)}. \quad (8)$$

Из (7) и (I.5)[4] заключаем, что $\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma}$ является фундаментальным объектом I порядка распределения $\{L^\circ\}$, образованного подпространствами L° с центрами P°. Система (3) равносильна следующей:

$$\Lambda^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\hat\beta}X^{\hat\alpha}X^{\hat\beta}+2\Lambda^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\beta}X^{\hat\alpha}X^\beta+\Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta+2X^{\hat\gamma}X^\circ=0. \quad (9)$$

Под полярой $\mathcal{J}(P)$ точки $P\in P_m$ относительно индикатрисы $\mathcal{J}$ понимается пересечение поляр этой точки относительно всех гиперквадрик линейного семейства $\lambda_\alpha\Phi^{\hat\alpha}=0$. Следующая теорема доказывается так же, как теорема 5 из [7].

Т е о р е м а 2. Пусть ℓ -прямая связки $\{P^\circ\}$. Множество фокальных точек, соответствующих направлению, которое определяется прямой ℓ, является пересечением поляры любой точки этой прямой относительно индикатрисы $\mathcal{J}$.

С л е д с т в и е I. Для фокального многообразия $\mathfrak{F}(H)$ [4], соответствующего нормали I рода H распределения $\{L^\circ\}$, имеем:

$$\mathfrak{F}(H)=\bigcup_{\substack{P\in H\\ P\neq P^\circ}}\left(L^\circ\cap\mathcal{J}(P)\right).$$

Под асимптотической прямой будем понимать прямую связки $\{P^\circ\}$, определяющую асимптотическое направление [4] распределения $\{L^\circ\}$.

С л е д с т в и е 2. Конус $\mathcal{J}\cap L^\circ$ является конусом асимптотических прямых.

С л е д с т в и е 3. В общем случае множество $\overline{\mathfrak{M}}\setminus\mathfrak{M}$ является множеством точек асимптотических прямых.

С л е д с т в и е 4. Точка P° является планарной точкой многообразия W_{P° в том и только в том случае, когда она является точкой типа S.

Список литературы

1. Д р а г н е в М.В., Р ы ж к о в В.В. К геометрии характеристических конусов отображения P_m в P_n при $m>n$.- Известия высших уч.заввдений.Математика, 1974, №5, 81-86.

2. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.-"Геометрия 1963". Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР, 1965, 67-107.

3. Р ы ж к о в В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n.- Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, 235-242.

4. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I.- Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, 49-94.

5. А н д р е е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград, Вып.2, 1971, с.28-37.

6. А н д р е е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между точечными пространствами и некоторыми пространствами пар фигур.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград, 1973.Вып.3, с.6-19.

7. А н д р е е в Б.А. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии соответствий между точечным проективным пространством и пространством нуль-пар.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград, 1974, Вып.5, с.6-24.