



УДК 664.7

В. И. Таранов**ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ОРИЕНТАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ
ПЛОСКОГО НАСЫПНОГО СЛОЯ
ИЗ ЧАСТИЦ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ**

Предложен теоретический метод расчета ориентации частиц в плоском насыпном слое из недеформируемых частиц одинаковой произвольной формы. Метод проиллюстрирован для слоя из равнобедренных треугольных призм постоянной толщины.

The theoretical method of calculation of orientation of particles in a flat bulk layer from not deformable particles of identical any form is offered. The method is illustrated for a layer from isosceles triangular prisms of a constant thickness.

51

Ключевые слова: гранулированный слой, ориентация частиц, плотность вероятности.

Keywords: granular layer, particle orientation, probability density.

Макроскопические свойства насыпных слоев из частиц произвольной формы определяются ориентацией частиц в слое. Для описания таких многочастичных систем удобно использовать плотность вероятности углового пространственного распределения частиц [1]. Однако в настоящее время не предложено методов по нахождению таких плотностей вероятности. В работе представлен метод нахождения плотности вероятности углового распределения одинаковых частиц произвольной формы в насыпном слое в однородном поле тяжести.

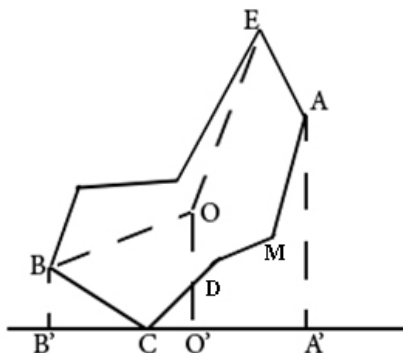
Будем считать слой неподвижным горизонтальным, поэтому любая частица слоя находится в устойчивом состоянии. Рассмотрим частицу произвольной формы при постоянной толщине, то есть плоский случай. Очевидно, пространственное распределение не меняет физического принципа, но добавляет дополнительный угол для описания ориентации частицы в пространстве.

На рисунке 1 представлена частица конкретной неправильной формы. Пусть точка O обозначает центр масс частицы. Для описания ориентации частицы в плоскости удобно задать вектор, соединяющий точку O с некоторой фиксированной точкой контура частицы, например с точкой E .

Введем некоторые характерные точки: O' — точка пересечения перпендикуляра из O с горизонтальной осью X ; A — наиболее удаленная вправо от оси OO' точка периметра частицы такая, что проекция OA на горизонтальную ось $O'A'$ максимальна среди всех проекций векторов, соединяющих точку O с произвольной точкой контура справа от оси OO' ; B — наиболее удаленная влево от оси OO' точка контура ча-



стицы (аналогично А); С – самая нижняя точка контура частицы; D – точка пересечения перпендикуляра OO' с контуром частицы.



52

Рис. 1. Частица конкретной неправильной формы

Будем считать, что формирование слоя из частиц прошло случайно, так что структура слоя полностью определяется формой частиц и влиянием поля тяжести. Условием устойчивого положения частиц в слое является наличие точек опоры на нижней части периметра частицы на участке ВСА (рис. 1). В насыпном слое, формирование которого происходит случайно, распределение опор на этом участке будет носить случайный характер.

Частица будет находиться в слое в устойчивом состоянии, если имеются точки опоры слева и справа от оси OO' . Обозначим через $P_{\text{л}}$ и $P_{\text{п}}$ вероятности реализации опор на нижних участках периметра частицы $BСD$ и DMA соответственно. Очевидно, они определяются распределением опор на проекциях этих участков на горизонтальную ось X на участках $O'B'$ и $O'A'$. Поэтому

$$P_{\text{л}} = \int_{B'}^{O'} \rho_{\text{л}} dx \quad \text{и} \quad P_{\text{п}} = \int_{O'}^{A'} \rho_{\text{п}} dx, \quad (1)$$

где $\rho_{\text{л}}$ и $\rho_{\text{п}}$ – плотности вероятности распределения опор на соответствующих участках. При случайном расположении частиц в слое можно считать, что $\rho_{\text{л}} = \rho_{\text{п}}$, то есть распределение опор по проекции периметра случайно и равновероятно. Тогда

$$P_{\text{л}} \sim O'B' \quad \text{и} \quad P_{\text{п}} \sim O'A' \quad (2)$$

Следовательно, вероятность того, что частица занимает фиксированное положение с данной ориентацией определяется вероятностью нахождения опоры на участке $O'A'$ при условии нахождения опоры на участке $O'B'$. Поэтому вероятность P реализации такого сложного случайного события будет равна

$$P = a(O'B')(O'A'), \quad (3)$$

где постоянная a определяется из условия нормировки.

Очевидно, в случае трехмерного пространства в выражение (3) будут входить проекции площадей частицы на горизонтальную плоскость.



Рассмотрим в качестве примера плоский насыпной слой, состоящий из равномерных треугольных призм постоянной толщины. Случай этот представляет практический интерес, поскольку форма частиц многих реальных насыпных слоев может быть смоделирована. Пусть треугольная призма повернута на угол φ — угол между вектором OA и осью x (рис. 2). Обозначим через α угол при вершине треугольника, а угол OBC — через β .

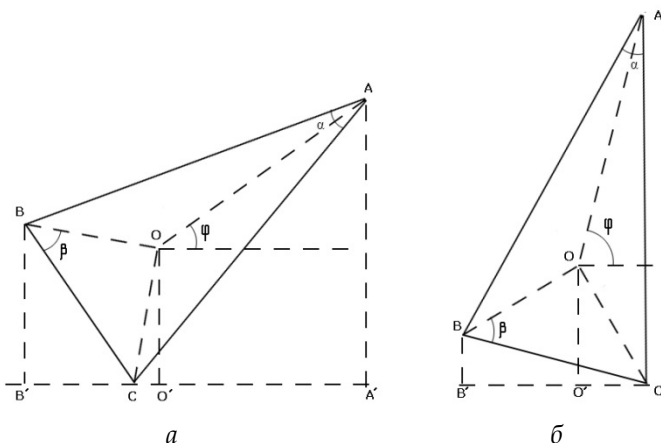


Рис. 2. Конфигурация треугольной призмы

Из рисунка 2 видно, что выражение для проекции OB и OA симметрично относительно вертикальной и горизонтальной осей, поэтому достаточно рассмотреть поведение треугольника в диапазоне углов от 0 до $\pi/2$. В соответствии с общей формулой (3) плотность вероятности того, что треугольник наклонен под углом φ , равна

$$\rho_1(\alpha) = a(OA)(OB) \sin(\varphi + \beta) \cos \varphi \quad (4)$$

для углов в диапазоне $0 \leq \varphi \leq (\pi/2 - \alpha/2)$ (рис. 2а), и

$$\rho_2(\alpha) = a(OC)(OB) \sin(\varphi + \beta) \sin(\varphi - \beta) \quad (5)$$

для углов в диапазоне $(\pi/2 - \alpha/2) \leq \varphi \leq \pi/2$ (рис. 2б), где a — постоянная, которая может быть найдена из условия нормировки, поскольку

$$\int_0^{\pi/2} \rho(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi/2 - \alpha/2} \rho_1 d\varphi + \int_{\pi/2 - \alpha/2}^{\pi/2} \rho_2(\alpha) d\varphi = \frac{1}{4}. \quad (6)$$

Подставляя выражения (4) и (5) в равенства (6), получим:

$$\rho_1(\varphi) = \frac{\sin(\varphi + \beta) \cos \varphi}{f_1 + \frac{3 \sin \alpha / 2}{2 \cos \beta} f_2}, \quad (7)$$

$$\rho_1(\varphi) = \frac{\sin(\varphi + \beta) \cos(\varphi - \beta)}{\frac{3 \cos \beta}{2 \sin \alpha / 2} f_1 + f_2}, \quad (8)$$



где $f_1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos \beta + (\pi - \alpha + \sin \alpha) \sin \beta$, $f_2 = \sin \alpha + \alpha \cos \beta$.

Полученные плотности вероятности (7) и (8) углового распределения треугольных равнобедренных призм в плоском слое в однородном поле тяжести является однопараметрическими, учитывая связь β и α через выражение (4).

Применение общего метода к насыпному слою из равнобедренных треугольных призм позволило получить конкретные выражения для плотности вероятности углового распределения частиц в насыпном слое в поле постоянной силы тяжести. С учетом ранее полученных на стенде данных по структуре насыпного слоя из равнобедренных треугольных призм [2; 3] предлагаемый теоретический метод допускает экспериментальную проверку.

54

Список литературы

1. Клеман М., Лаврентович О.Д. Основы физики частично упорядоченных сред. М., 2007.
2. Таранов В.И., Тосунова Е.Д. Исследование пространственно-распределенной стохастической структуры из равнобедренных треугольников на плоской модели // Вестник Российского государственного университета им. Канта. 2008. Вып. 4. С. 77–80.
3. Таранов В.И., Леонтьев С.А. Ориентационная структура плоского слоя из равнобедренных треугольников в поле тяжести // Вестник Российского государственного университета им. Канта. 2009. Вып. 5.

Об авторе

Владимир Иванович Таранов – канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: vladim.tar@gmail.com

About the author

Vladimir Taranov – PhD, Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: vladim.tar@gmail.com