УДК 514.764.2

И. А. Гордеева, А. А. Рылов

(Владимирский государственный педагогический университет,
Финансовая академия при Правительстве РФ, г. Москва)

ДВЕ ТЕОРЕМЫ ИСЧЕЗНОВЕНИЯ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ТЕНЗОРОВ НА МНОГООБРАЗИИ РИМАНА — КАРТАНА

Введение. В монографии [1] были доказаны «теоремы исчезновения» для кососимметрических псевдогармонических и псевдокиллинговых тензоров на компактном ориентированном римановом многообразии с несимметрической метрической связностью. В данной работе мы проведем аналогичные рассуждения для симметрических тензоров. Возможность доказательства теорем исчезновения для симметрических тензоров на таком многообразии оставалась вне поля зрения исследователей вплоть до настоящего времени.

1. Определения. Многообразием Эйнштейна — Картана называется (см. [2]) триплет $\left(M, g, \overline{\nabla}\right)$, где M — гладкое класса C^∞ многообразие размерности $n \geq 2$, g — риманова метрика и $\overline{\nabla}$ — несимметрическая метрическая связность, т. е. линейная связность с ненулевым тензором кручения $S \in C^\infty\left(\Lambda^2 M \otimes TM\right)$ такая, что $\overline{\nabla} g = 0$.

Так же, как и на римановом многообразии (см. [3, с. 54]), определим на $\left(M, g, \overline{\nabla}\right)$ операторы симметрического дифференцирования $\overline{\delta}^* : C^\infty S^p M \to C^\infty S^{p+1} M$ и кодифференцирования $\overline{\delta} : C^\infty S^p M \to C^\infty S^{p-1} M$ равенствами

$$\left(\overline{\delta}^* \varphi\right)_{i_0 i_1 \ldots i_p} = \overline{\nabla}_{i_0} \varphi_{i_1 \ldots i_{p-1} i_p} + \ldots + \overline{\nabla}_{i_p} \varphi_{i_0 i_1 \ldots i_{p-1}}\,; \quad \left(\overline{\delta} \varphi\right)_{i_2 \ldots i_p} = g^{ij} \overline{\nabla}_i \varphi_{j i_2 \ldots i_p}$$

в локальной системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ на *M*. Здесь $\varphi_{i_1\dots i_p}=\varphi\left(\partial_{i_1},\dots,\partial_{i_p}\right)$ и $\left(g^{ij}\right)=\left(g_{ij}\right)^{-1}$ для $g_{ij}=g\left(\partial_i,\partial_j\right)$.

Заметим, что так же, как и на компактном ориентируемом римановом многообразии (M,g), на компактном ориентируемом многообразии Римана — Картана $\left(M,g,\overline{\nabla}\right)$ стандартными приемами (см. [4, с. 170—171]) без труда доказывается сопряженность операторов $\overline{\delta}^*$ и $\overline{\delta}$.

Определим далее на $\left(M,g,\overline{\nabla}\right)$ *псевдокиллинговый* (соответственно *псевдокодацциевый*) *p-тензор* как тензорное поле $\varphi\in C^\infty S^pM$, удовлетворяющее уравнению $\overline{\delta}^*\varphi=0$ (соответственно $\overline{\delta}^*\varphi=(p+1)\overline{\nabla}\varphi$).

Отметим при этом, что на римановом многообразии $(M,\ g)$ уравнение $\delta^*\varphi=0$ и условие $\nabla\varphi\in C^\infty S^{p+1}M$, которое равносильно уравнению $\delta^*\varphi=(p+1)\nabla\varphi$, определяют симметрические p-тензоры Киллинга и Кодацци соответственно (см., напр., [5; 6]).

2. Интегральная формула. Обозначим через $\overline{R}^i{}_{jkl}$ и $S_{ij}{}^k$ компоненты тензоров кривизны $\overline{R}$ и кручения S несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ относительно локальной системы координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ на *M*.

Для всякого векторного поля *X* имеем (см. [1, с. 88]) $div\ X=\nabla_i X^i=\overline{\nabla}_i X^i-2X^kS_{kj}{}^j$, а потому при $S_{ij}{}^j=0$ справедливо равенство $div\ X=\nabla_i X^i=\overline{\nabla}_i X^i$. На этом основании будем полагать далее, что $S_{ij}{}^j=0$.

Введем в рассмотрение векторное поле *X* с компонентами $X^i=\varphi^j{}_{i_2\dots i_p}\overline{\nabla}_j\varphi^{ii_2\dots i_p}-\varphi^i{}_{i_2\dots i_p}\overline{\nabla}_j\varphi^{ji_2\dots i_p}$. Привлекая сюда тождества Риччи (см. [1, с. 79]), находим, что

$$div\,X = \Phi_p(\varphi) + \overline{\nabla}^i \varphi^{j i_2 \ldots i_p} \overline{\nabla}_j \varphi_{i i_2 \ldots i_p} - \overline{\nabla}_j \varphi^{j i_2 \ldots i_p} \overline{\nabla}^i \varphi_{i i_2 \ldots i_p}, \quad (1)$$

где для $\overline{R}_{ij} = \overline{R}^k{}_{ikj}$ имеем

$$\Phi_p(\varphi) = \overline{R}_{ij} \varphi^{i i_2 \ldots i_p} \varphi^j{}_{i_2 \ldots i_p} - (p-1)\overline{R}_{ikjl} \varphi^{i j i_3 \ldots i_p} \varphi^{kl}{}_{i_3 \ldots i_p} -$$

$$- 2S_{ijl} \overline{\nabla}^l \varphi^{i i_2 \ldots i_p} \varphi^j{}_{i_2 \ldots i_p}. \quad (2)$$

Здесь ввиду симметричности компонент $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ тензорного поля φ по всем индексам формулу (1) представим в виде

$$divX = \Phi_p(\varphi) - \frac{1}{p} \overline{\nabla}^{i_0} \varphi^{i\, i_2 \ldots i_p} \overline{\nabla}_{i_0} \varphi_{i\, i_2 \ldots i_p} +$$

$$+ \frac{p+1}{p} \overline{\nabla}^{(i_0} \varphi^{i\, i_2 \ldots i_p)} \overline{\nabla}_{(i_0} \varphi_{i\, i_2 \ldots i_p)} - \overline{\nabla}_j \varphi^{j\, i_2 \ldots i_p} \overline{\nabla}^i \varphi_{i\, i_2 \ldots i_p}.$$

Полагая многообразие *M* компактным ориентированным, на основании теоремы Грина (см. [1, с. 30]) находим

$$\int_M \left(\Phi_p(\varphi) - \frac{1}{p} \left\| \overline{\nabla} \varphi \right\|^2 + \frac{1}{p(p+1)} \left\| \overline{\delta}^* \varphi \right\|^2 - \left\| \overline{\delta} \varphi \right\|^2 \right) dv = 0. \quad (3)$$

3. Теоремы исчезновения. Для псевдокиллингова тензора $\varphi \in C^\infty S^p M$ интегральная формула (3) примет вид:

$$\int_M \left(\Phi_p(\varphi) - \frac{1}{p} \left\| \overline{\nabla} \varphi \right\|^2 - \left\| \overline{\delta} \varphi \right\|^2 \right) dv = 0. \quad (4)$$

Тогда при $\Phi_p(\varphi) \leq 0$ из (4) автоматически последует, что $\Phi_p(\varphi) = 0$ и $\overline{\nabla} \varphi = 0$. В свою очередь условие $\Phi_p(\varphi) < 0$ вступит в противоречие с интегральной формулой (4). Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть* $(M,\, g, \overline{\nabla})$ *— компактное ориентированное многообразие Римана — Картана с тензором кручения* S *связности* $\overline{\nabla}$, *подчиненным условию* $trace\, S = 0$. *Если для* *псевдокиллингова p-тензора* φ *неравенство* $\varPhi_p(\varphi) \le 0$ *имеет место всюду на* $(M,\, g, \overline{\nabla})$*, то тензор будет ковариантно постоянным. Не существует псевдокиллингова p-тензора* φ*, для которого* $\varPhi_p(\varphi) < 0$ *всюду на* $(M,\, g, \overline{\nabla})$.

Предположим, что псевдокодацциевый p-тензор φ является бесследовым, т.е. $\varphi \in C^\infty S_0^p M$, тогда из уравнения $\overline{\delta}^* \varphi = 0$ последует, что $\overline{\delta}\varphi = 0$. В этом случае интегральная формула (3) принимает вид:

$$\int_M \left(\varPhi_p(\varphi) - \left\| \overline{\nabla} \varphi \right\|^2 \right) dv = 0 \, .$$

Аналогичным образом доказывается, что справедлива

Теорема 2. *Пусть* $(M,\, g, \overline{\nabla})$ *— компактное ориентированное многообразие Римана — Картана с тензором кручения* S *связности* $\overline{\nabla}$*, подчиненным условию* $\operatorname{trace} S = 0$*. Если для псевдокодацциева p-тензора* $\varphi \in C^\infty S_0^p M$ *неравенство* $\varPhi_p(\varphi) \ge 0$ *имеет место всюду на* $(M,\, g, \overline{\nabla})$*, то тензор будет ковариантно постоянным. Не существует псевдокодацциева p-тензора* $\varphi \in C^\infty S_0^p M$*, для которого* $\varPhi_p(\varphi) > 0$ *всюду на* $(M,\, g, \overline{\nabla})$.

Частным видом (см. [7]) многообразия Римана — Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ является многообразие класса σ_1, которое выделяется условием $\overline{S} \in C^\infty \varLambda^3 M$ для ковариантного тензора кручения $\overline{S}(X,Y,Z) = g(S(X,Y),Z)$ связности $\overline{\nabla}$ и произвольных векторных полей $X,Y,Z \in C^\infty TM$. В случае псевдокодацциева тензора $\varphi \in C^\infty S^p M$ на подобном многообразии $\varPhi_p(\varphi)$ становится квадратичной формой вида $\varPhi_p(\varphi) = \overline{R}_{ij}\, \varphi^{i i_2 \ldots i_p}\, \varphi^{j}{}_{i_2 \ldots i_p} - (p-1)\overline{R}_{ikjl}\, \varphi^{iji_3 \ldots i_p}\, \varphi^{kl}{}_{i_3 \ldots i_p}$, поскольку $S_{ijl}\, \overline{\nabla}^l\, \varphi^{i i_2 \ldots i_p}\, \varphi^{j}{}_{i_2 \ldots i_p} = 0$. Справедливо

Следствие. *Пусть* $\left(M, g, \overline{\nabla}\right)$ *— компактное ориентированное многообразие Римана — Картана с антисимметричным тензором кручения* $\overline{S}$ *связности* $\overline{\nabla}$. *Если для псевдокодацциева p-тензора* $\varphi \in C^{\infty} S_0^p M$ *квадратичная форма* $\Phi_p(\varphi) \geq 0$ *всюду на* $\left(M, g, \overline{\nabla}\right)$, *то тензор будет ковариантно постоянным. Не существует псевдокодацциевых p-тензоров* $\varphi \in C^{\infty} S_0^p M$, *для которых квадратичная форма* $\Phi_p(\varphi) > 0$ *всюду на* $\left(M, g, \overline{\nabla}\right)$.

Список литературы

1. *Яно К., Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957.

2. *Trautman A.* The Einstein-Cartan theory // Encyclopedia of Mathematical Physics / Edited by Francoise J.-P., Naber G. L., Tsou S. T. Oxford: Elsevier. 2006. Vol. 2. P. 189—195.

3. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна: В 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1990.

4. *Де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия. М.: ИЛ, 1956.

5. *Thompson G.* Killing tensor in spaces of constant curvature // Journal of Mathematical Physics. 1986. Vol. 27. No. 11. P. 2693—2699.

6. *Степанов С. Е.* Поля симметрических тензоров на компактном римановом многообразии // Математические заметки. 1992. Т. 52. № 4. С. 85—88.

7. *Гордеева И. А.* О классификации несимметрических метрических связностей // Международный геометрический семинар им. Г. Ф. Лаптева. Пенза, 2007. С. 30—37.

I. Gordeeva, A. Rylov

TWO VANISHING THEOREMS FOR SYMMETRIC TENSORS ON THE RIEMANNIAN — CARTAN MANIFOLD

We have defined pseudo-Killing and pseudo-Codazzi symmetric tensors and proved two “vanishing theorems” for these tensors on a Riemannian — Cartan manifold (see [2]).