7. *Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко А. Т.* Введение в топологию. М., 1995.

M. A. Cheshkova

The model of projective plane

If along a closed curve on the surface local orientation of the tangent space changes sign, then the surface is called a one-sided surface. The simplest one-sided surface is the Mobius strip. Klein bottle, cross-cap, Roman surface and Boy's surface are also one-sided surfaces. Roman surface, Boy's surface are models of projective plane. We define two vector functions in the Euclidean space E^n: 2π -periodic and 2π -antiperiodic. Using the obtained functions model for the projective plane are given. We construct in the Euclidean space E^3 model for projective plane with a help of mathematical package.

УДК 514.76

Ю. И. Шевченко
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
ESkrydlova@kantiana.ru

Голономность, полуголономность и неголономность однородных и псевдооднородных пространств

Показано, что в общем случае однородное пространство является полуголономным гладким многообразием. Найдено условие голономности однородного пространства. Показано, что проективное пространство обладает голономностью 1-го порядка и тривиальностью 2-го порядка. Доказано, что псевдооднородное пространство, вообще говоря, неголономно.

Ключевые слова: голономность, полуголономность, неголономность, однородное пространство, псевдооднородное пространство.

1. Однородное пространство. Рассмотрим r -членную группу Ли G_r со структурными уравнениями

$$d\omega^I = c^I_{JK}\omega^J \wedge \omega^K \quad (I,... = \overline{1,r}), \tag{1}$$

причем структурные постоянные c^I_{JK} удовлетворяют условиям антисимметрии и тождествам Якоби

$$c^I_{(JK)} = 0, \;\; c^I_{J\{K}c^J_{LM\}} = 0, \tag{2}$$

где круглые скобки обозначают симметрирование, а фигурные — циклирование.

Зададим натуральное число $n: 0 < n < r$ и произведем разбиение значений индексов

$$I = (i,\alpha); \;\; i,... = \overline{1,n}; \;\; \alpha,... = \overline{n+1,r}.$$

Запишем структурные уравнения (1) подробно:

$$d\omega^i = c^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k + 2c^i_{j\alpha}\omega^j \wedge \omega^\alpha + c^i_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta, \tag{3}$$

$$d\omega^\alpha = c^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + 2c^\alpha_{\beta i}\omega^\beta \wedge \omega^i + c^\alpha_{ij}\omega^i \wedge \omega^j. \tag{4}$$

Пусть

$$c^i_{\alpha\beta} = 0, \tag{5}$$

тогда уравнения (3) примут вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \;\; \omega^i_j = c^i_{jk}\omega^k + 2c^i_{j\alpha}\omega^\alpha. \tag{6}$$

Уравнения (4) запишем следующим образом:

$$d\omega^\alpha = c^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega^\alpha_i, \;\; \omega^\alpha_i = c^\alpha_{ij}\omega^j - 2c^\alpha_{\beta i}\omega^\beta. \tag{7}$$

Возьмем часть тождеств (2_2) с внешними греческими индексами

$$c^\alpha_{J\{\gamma}c^J_{\delta\varepsilon\}} = 0,$$

которые запишем подробнее:

$$c^{\alpha}_{\beta\{\gamma}c^{\beta}_{\delta\varepsilon\}} + c^{\alpha}_{j\{\gamma}c^{j}_{\delta\varepsilon\}} = 0.$$

В силу условия (5) 2-е слагаемое равно нулю, поэтому

$$c^{\alpha}_{\beta\{\gamma}c^{\beta}_{\delta\varepsilon\}} = 0.$$

Это тождества Якоби для структурных постоянных $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$ $(r-n)$-членной группы Ли H_{r-n}.

Утверждение 1. *При выполнении условия (5) группа Ли G_r становится главным расслоением $H_{r-n}(E_n)$ со структурными уравнениями $(6_1, 7_1)$, базой которого является n-мерное гладкое многообразие — однородное пространство $E_n = G_r / H_{r-n}$, а типовым слоем служит группа Ли H_{r-n} — подгруппа стационарности точки пространства E_n.*

Найдем внешние дифференциалы форм (6_2) с помощью структурных уравнений $(6_1, 7_1)$:

$$d\omega^{i}_{j} = 2c^{i}_{j\gamma}c^{\gamma}_{\alpha\beta}\omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta} + \omega^{k}\wedge(c^{i}_{jl}\omega^{l}_{k} + 2c^{i}_{j\alpha}\omega^{\alpha}_{k}). \tag{8}$$

Преобразуем следующее внешнее произведение форм (6_2):

$$\begin{aligned}&\omega^{m}_{j}\wedge\omega^{i}_{m} = 4c^{k}_{j\alpha}c^{i}_{k\beta}\omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta} + \\ &+\omega^{k}\wedge[c^{m}_{jk}c^{i}_{ml}\omega^{l} + 2(c^{l}_{jk}c^{i}_{l\alpha} - c^{l}_{j\alpha}c^{i}_{lk})\omega^{\alpha}].\end{aligned} \tag{9}$$

Покажем совпадение первых слагаемых в формулах (8) и (9). Запишем часть тождеств Якоби (2_2), соответствующую 1-му слагаемому формулы (8) и учтем условие (5)

$$c^{i}_{j\gamma}c^{\gamma}_{\alpha\beta} + c^{i}_{\alpha k}c^{k}_{\beta j} + c^{i}_{\beta k}c^{k}_{j\alpha} = 0.$$

С помощью этих тождеств доказывается совпадение рассматриваемых слагаемых:

$$2c^i_{j\gamma}c^\gamma_{\alpha\beta}\omega^\alpha\wedge\omega^\beta=-2c^i_{\alpha k}c^k_{\beta j}\omega^\alpha\wedge\omega^\beta-$$

$$-2c^i_{\beta k}c^k_{j\alpha}\omega^\alpha\wedge\omega^\beta=4c^k_{j\alpha}c^i_{k\beta}\omega^\alpha\wedge\omega^\beta.$$

Выразим 1-е слагаемое из формулы (9) и подставим результат в формулу (8):

$$d\omega^i_j=\omega^k_j\wedge\omega^i_k+\omega^k\wedge[c^i_{jl}\omega^l_k+2c^i_{j\alpha}\omega^\alpha_k-$$

$$-c^m_{jk}c^i_{ml}\omega^l-2(c^l_{jk}c^i_{l\alpha}-c^l_{j\alpha}c^i_{lk})\omega^\alpha].$$

Раскроем обозначения форм $(6_2,7_2)$:

$$d\omega^i_j=\omega^k_j\wedge\omega^i_k+\omega^k\wedge[(c^i_{jm}c^m_{kl}+2c^i_{j\alpha}c^\alpha_{kl}-c^m_{jk}c^i_{ml})\omega^l+$$

$$+2(c^i_{jl}c^l_{k\alpha}-2c^i_{j\beta}c^\beta_{\alpha k}-c^l_{jk}c^i_{l\alpha}+c^l_{j\alpha}c^i_{lk})\omega^\alpha].$$

С помощью тождеств (2_2) преобразуем выражение в круглых скобках, причем во 2-й скобке учтем условие (5):

$$d\omega^i_j=\omega^k_j\wedge\omega^i_k+\omega^k\wedge\omega^i_{jk},$$

$$\omega^i_{jk}=(c^\alpha_{jk}c^i_{\alpha l}-c^m_{lj}c^i_{km}-2c^i_{\alpha(j}c^\alpha_{k)l})\omega^l-4c^i_{\beta(j}c^\beta_{k)\alpha}\omega^\alpha. \qquad (10)$$

Альтернирование последних форм дает

$$\omega^i_{[jk]}=(c^\alpha_{jk}c^i_{\alpha l}-c^m_{l[j}c^i_{k]m})\omega^l. \qquad (11)$$

В силу тождеств Якоби (2_2) циклирование коэффициентов при базисных формах по нижним индексам аннулирует их:

$$c^\alpha_{\{jk}c^i_{|\alpha|l\}}-c^m_{\{l[j}c^i_{k]\}m}=0.$$

Теорема 1. *Однородное пространство E_n в общем случае является полуголономным гладким многообразием [1].*

Следствие. *Условие голономности 1-го порядка для однородного пространства E_n имеет вид*

$$c^\alpha_{jk}c^i_{\alpha l}-c^m_{l[j}c^i_{k]m}=0. \qquad (12)$$

Действительно, при выполнении условия (12) формула (11) дает $\omega^i_{[jk]}=0$, т.е. формы ω^i_{jk} симметричны по нижним индексам.

2. Проективное пространство. В качестве примера голономного гладкого многообразия возьмем n-мерное проективное пространство P_n. Отнесем проективное пространство P_n к неоднородному реперу $\{A, A_i\}$ с деривационными формулами (см., напр.: [2])

$$dA=\theta A+\omega^i A_i,\ dA_i=\theta A_i+\omega_i^j A_j+\omega_i A, \tag{13}$$

где $\theta,\omega^i,\omega^i_j,\omega_i$ — линейные дифференциальные формы. Форма θ играет роль множителя пропорциональности, а остальные формы являются структурными формами проективной группы $GP(n)$, эффективно действующей в пространстве P_n. Структурные уравнения проективной группы $GP(n)$ имеют вид (см., напр.: [2])

$$\begin{aligned} &d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j, d\omega_i=\omega_i^j\wedge\omega_j,\\ &d\omega^i_j=\omega^k_j\wedge\omega^i_k+\delta^i_j\omega_k\wedge\omega^k+\omega_j\wedge\omega^i. \end{aligned} \tag{14}$$

Деривационная формула (13_1) и структурные уравнения (14_1) показывают, что вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i=0$ выделяет коаффинную (центропроективную) подгруппу $GA^*(n)$ стационарности точки $A\in P_n$. Структурные уравнения группы $GA^*(n)\subset GP(n)$ получаются из уравнений (14_{2-3})

$$d\pi^i_j=\pi^k_j\wedge\pi^i_k,\ d\pi_i=\pi_i^j\wedge\pi_j\ \ (\pi=\omega\big|_{\omega^i=0}).$$

Следовательно, проективное пространство P_n можно представить как множество смежных классов $P_n=GP(n)/GA^*(n)$ со структурными уравнениями (14_1).

Уравнения (14_3) запишем в виде

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \omega_{jk}^i = -\delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j . \qquad (15)$$

Продифференцируем формы (15_2) с помощью структурных уравнений (14_2):

$$d\omega_{jk}^i = -\delta_j^i \omega_k^l \wedge \omega_l - \delta_k^i \omega_j^l \wedge \omega_l . \qquad (16)$$

Рассмотрим следующую сумму внешних произведений:

$$\Sigma = \omega_{jk}^l \wedge \omega_l^i - \omega_{lk}^i \wedge \omega_j^l - \omega_{jl}^i \wedge \omega_k^l . \qquad (17)$$

Раскроем обозначения (15_2) трехиндексных форм и приведем подобные члены:

$$\Sigma = \delta_k^i \omega_l \wedge \omega_j^l + \delta_j^i \omega_l \wedge \omega_k^l . \qquad (18)$$

Правая часть структурных уравнений (16) совпадает с суммой Σ (18), поэтому в правую часть уравнения (16) можно подставить сумму Σ в виде (17):

$$d\omega_{jk}^i = \omega_{jk}^l \wedge \omega_l^i - \omega_{lk}^i \wedge \omega_j^l - \omega_{jl}^i \wedge \omega_k^l .$$

В этих структурных уравнениях не возникало четырехиндексных форм ω_{jkl}^i. Следовательно, можно считать, что $\omega_{jkl}^i = 0$. Трехиндексные формы ω_{jk}^i (15_2) симметричны по нижним индексам. Значит, справедливо

Утверждение 2. *Проективное пространство P_n обладает голономностью 1-го порядка и тривиальностью 2-го порядка (см.: [1]).*

Говорят также [3], что порядок голономной изотропии проективного пространства P_n равен 2.

3. Псевдооднородное пространство. Рассмотрим псевдогруппу G_∞ (бесконечномерную группу Ли — Картана) как обобщение конечной группы Ли G_r с заданной подгруппой H_{r-n}. Она имеет бесконечную серию структурных уравнений (см., напр.: [4]), первые из них совпадают с уравнениями (6_1), в которых используется обозначение (6_2). Вторая совокупность уравнений имеет вид (7_1), но формы (7_2) выражаются следующим образом:

$$\omega_i^\alpha = c_{ij}^\alpha \omega^j + 2c_{i\beta}^\alpha \omega^\beta + c_{ia}^\alpha \omega^a, \tag{19}$$

где $c_{ia}^\alpha = const$; ω^a — новые формы с индексом a, принимающим конечное множество значений. Внешние дифференциалы форм ω^a также содержат новые формы и т. д.

Бесконечная серия структурных уравнений псевдогруппы G_∞ включает уравнения (6_1), поэтому система уравнений $\omega^i = 0$ остается вполне интегрируемой. Она выделяет подпсевдогруппу $H_\infty \subset G_\infty$.

Конечная группа G_r с заданной подгруппой H_{r-n} является главным расслоением $G_r = H_{r-n}(E_n)$. Аналогично бесконечномерная псевдогруппа G_∞, в которой имеется бесконечномерная подпсевдогруппа H_∞, является расслоением $G_\infty = H_\infty(V_n)$ с базой — псевдооднородным пространством V_n [4]. Назовем $H_\infty(V_n)$ псевдоглавным расслоением.

Выясним степень неголономности псевдооднородного пространства V_n со структурными уравнениями (6_1). Поскольку формы ω_i^α приняли более общий вид (19) по сравнению с выражениями (7_2), в формуле (10) добавится слагаемое

$2c^i_{j\alpha}c^\alpha_{ka}\omega^a$, а в альтернации (11) — слагаемое $2c^i_{[j|\alpha|}c^\alpha_{k]a}\omega^a$. Таким образом, формы $\omega^\alpha_{[ij]}$ перестанут быть линейными комбинациями только базисных форм ω^l, поэтому справедлива

Теорема 2. *Псевдооднородное пространство V_n является, вообще говоря, неголономным гладким многообразием [5]; при условии $c^i_{[j|\alpha|}c^\alpha_{k]a} = 0$ пространство V_n будет полуголономным 1-го порядка; если, кроме того, выполняется условие (12), то псевдооднородное пространство V_n станет голономным 1-го порядка.*

Список литературы

1. *Шевченко Ю.И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 168—177.
2. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.
3. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 1—247.
4. *Евтушик Л.Е.* Структуры высших порядков. М., 2014.
5. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

Yu. Shevchenko

Holonomicity, semi-holonomicity and non-holonomicity of homogeneous and pseudo-homogeneous spaces

It is shown that generally a homogeneous space is semi-holonomic smooth manifold. The holonomicity condition of homogeneous space is found. It is shown that projective space possesses holonomicity of the 1st order and a triviality of the 2nd order. It is proved that pseudo-homogeneous space, generally speaking, non-holonomic.