ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

В.П.Толстопятов

К ГЕОМЕТРИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

I. Присоединим к гладкой p-мерной поверхности $V_p \subset E_n$ подвижной репер $R^x=(x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha)$, где $\vec{e}_i$ образуют базис касательного пространства $T_x(V_p)$ к поверхности V_p в точке x, а $\vec{e}_\alpha$ – базис нормального дополнения $N_x(V_p)$. Векторному полю $\vec{\xi}=\xi^i\vec{e}_i$ на поверхности V_p соответствует секущая поверхность $\overline{V}(\xi)$ I-распределения $\Delta_1=\Delta(\vec{\xi})$, уравнение которой $\vec{\bar{x}}=\vec{x}+\vec{\xi}$. Обозначим $c_i^k=\mu_i^k+\delta_i^k$, где $\mu_i^k=\nabla_{\vec{e}_i}\xi^k$ – ковариантные производные координат векторного поля. Пусть выполняется условие: $\mathrm{rang}\,\|c_i^k, b_{i\ell}^\alpha\xi^\ell\|=p$. Тогда векторы

$$\vec{a}_i=c_i^k\vec{e}_k+b_{i\ell}^\alpha\xi^\ell\vec{e}_\alpha \qquad (1)$$

образуют базис касательного пространства к секущей поверхности в точке $\bar{x}$. Секущая поверхность при этом является p-мерной, будем обозначать ее $\overline{V}_p$. Присоединим к секущей поверхности $\overline{V}_p$ подвижной репер $R^{\bar{x}}=(\bar{x},\vec{a}_i,\vec{a}_\alpha)$, где $\vec{a}_\alpha$ определяют базис нормального дополнения $N_{\bar{x}}(\overline{V}_p)$ к касательному пространству к секущей поверхности в точке $\bar{x}$. В общем случае для векторного поля $\vec{\xi}$ имеем

$$\vec{\xi}=t^i\vec{a}_i+t^\alpha\vec{a}_\alpha.$$

II. Рассмотрим случай, когда $\vec{\xi}$ ортогонально секущей поверхности $\overline{V}_p$, т.е. $\vec{\xi}\in N_{\bar{x}}(\overline{V}_p)$. Имеем

$$\vec{\xi}\,\vec{a}_i=0 \qquad (2)$$

или

$$\mu_i^k\xi^\ell\gamma_{k\ell}+\xi^k\gamma_{ki}=0, \qquad (3)$$

то есть $\vec{\xi}\in\Phi$ – конусу второго порядка ($\Phi=c_{ij}\omega^i\omega^j=0$, $c_{ij}=c_i^k\gamma_{kj}$), лежащему в касательной плоскости к поверхности V_p, образованному направлениями, при смещении по которым $d\vec{x}$ и соответствующее $d\vec{\bar{x}}$ ортогональны. Из (3) имеем

Следствие 1. Ненулевое векторное поле $\vec{\xi}$ постоянной длины не может быть ортогонально секущей поверхности.

Доказательство. Если $\vec{\xi}$ векторное поле постоянной длины, то имеем

$$\vec{\xi}\,d\vec{\xi}=0. \qquad (4)$$

Так как $d\vec{\xi}=\mu_i^k\omega^i\vec{e}_k+b_{i\ell}^\alpha\xi^\ell\omega^i\vec{e}_\alpha$, то из (4) следует:

$$\mu_i^k\xi^\ell\gamma_{k\ell}=0. \qquad (5)$$

Если предположить, что векторное поле постоянной длины ортогонально секущей поверхности, то из (3) и (5) следует, что $\vec{\xi}$ нулевое векторное поле.

Следствие 2. Если векторное поле $\vec{\xi}$, интегральные линии которого геодезические, ортогонально секущей поверхности, то $\nabla_{\vec{\xi}}\vec{\xi}=-\vec{\xi}$.

Доказательство. Условие (3) можно записать иначе:

$$\vec{\xi}\,(\nabla_{\vec{e}_i}\vec{\xi}+\vec{e}_i)=0. \qquad (6)$$

Свернем (6) с ξ^i, получим:

$$\vec{\xi}\cdot(\nabla_{\vec{\xi}}\vec{\xi}+\vec{\xi})=0. \qquad (7)$$

Если интегральные линии поля $\vec{\xi}$ геодезические, то $\nabla_{\vec{\xi}}\vec{\xi}=\lambda\vec{\xi}$. Из (7) следует $(\lambda+1)\cdot\vec{\xi}^2=0$. Так как нулевое векторное поле не входит в наше рассмотрение, то имеем $\lambda=-1$, т.е. $\nabla_{\vec{\xi}}\vec{\xi}=-\vec{\xi}$. Таким образом, если для векторного поля $\vec{\xi}$ имеем $\nabla_{\vec{\xi}}\vec{\xi}=\lambda\vec{\xi}$, $\lambda\neq-1$, то это векторное поле не может быть ортогонально секущей поверхности $\overline{V}_p$.

Следствие 3. Градиентное векторное поле $\vec{\xi}$ ортогонально секущей поверхности тогда и только тогда, когда $\nabla_{\vec{\xi}}\vec{\xi}=-\vec{\xi}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть градиентное векторное поле $\vec{\xi}$ ортогонально секущей поверхности $\overline{V}_p$. Из условия градиентности

$$\mu_i^k\gamma_{kj}=\mu_j^k\gamma_{ki} \qquad (8)$$

и соотношения (3) имеем:

$$\mu^{k}_{\ell}\,\xi^{\ell}\gamma_{ki} + \xi^{k}\gamma_{ki} = 0 \qquad (9)$$

или

$$\mu^{k}_{\ell}\,\xi^{\ell} + \xi^{k} = 0. \qquad (10)$$

Таким образом, получаем:

$$\nabla_{\vec{\xi}}\vec{\xi} = -\vec{\xi}. \qquad (11)$$

Достаточность. Пусть для градиентного векторного поля имеет место условие (11), которое равносильно (10) или (9). Так как $\vec{\xi}$ градиентное векторное поле, то имеет место условие (8). Тогда из (9) следует $\mu^{k}_{i}\xi^{\ell}\gamma_{k\ell} + \xi^{k}\gamma_{ki} = 0$, т.е. $\vec{\xi}$ ортогонально секущей поверхности $\overline{V}_p$.

III. Рассмотрим другой возможный случай, когда векторное поле $\vec{\xi}$ касается секущей поверхности $\overline{V}_p$, т.е. секущая поверхность $\overline{V}_p$ является фокальной для направления $[x, \vec{\xi}]$. В этом случае естественно векторное поле назвать фокальным. Итак, поле $\vec{\xi}$ является фокальным тогда и только тогда, когда

$$\vec{\xi} = \xi^{i}\vec{e}_{i}, \quad \vec{\xi} = t^{k}\vec{a}_{k}. \qquad (12)$$

Приходим к системе

$$\nabla_{\vec{t}}\vec{\xi} = \vec{\xi} - \vec{t}; \quad \ell^{\alpha}_{ki} t^{k}\xi^{i} = 0. \qquad (13)$$

Условия (12) и (13) эквивалентны, поэтому имеет место

Т е о р е м а. Векторное поле $\vec{\xi}$ является фокальным тогда и только тогда, когда на V_p существует векторное поле $\vec{t}$, сопряженное с направлением поля $\vec{\xi}$, для которого $\nabla_{\vec{t}}\vec{\xi} = \vec{\xi} - \vec{t}$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 16 1985

УДК 514.75

Т.П. Ф у н т и к о в а

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ПАРОЙ ЭЛЛИПСОВ

В трехмерном аффинном пространстве исследуются вырожденные [1] конгруэнции $(C_1C_2)_{1,2}$, порожденные парой эллипсов C_1 и C_2, причем эллипсы C_1 и C_2 имеют общую касательную, но не лежат в одной плоскости.

Многообразие (C_1) эллипсов C_1 – одномерное, а многообразие (C_2) эллипсов C_2 – двумерное, таким образом, каждому эллипсу C_1 соответствует однопараметрическое семейство $(C_2)_{C_1}$ эллипсов C_2.

Отнесем конгруэнцию $(C_1C_2)_{1,2}$ к реперу $R = \{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, вершина A которого помещена в точку касания эллипсов C_1 и C_2, концы векторов $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_1$ совмещены соответственно с центрами O_1 и O_2 эллипсов C_1 и C_2, вектор $\vec{e}_2$ направлен по общей касательной эллипсов и нормирован.

Уравнения эллипсов C_1 и C_2 относительно выбранного репера записываются в виде:

$$C_1 : \quad (x^3)^2 - 2x^3 + (x^2)^2 = 0, \quad x^1 = 0;$$

$$C_2 : \quad (x^1)^2 - 2x^1 + a^2(x^2)^2 = 0, \quad x^3 = 0.$$

Конгруэнции $(C_1C_2)_{1,2}$ определяются системой уравнений Пфаффа:

$$\begin{aligned} &\omega^3 = b\omega^1, \quad \omega^3_3 = k\omega^1; \quad \omega^3_2 = c\omega^1 + \omega^2; \quad \omega^2_3 = \ell\omega^1 - \omega^2; \\ &\omega^2_2 = p\omega^1, \quad \omega^1_2 = m\omega^1, \quad \omega^1_3 = n\omega^1, \quad \omega^{\alpha}_1 = \Gamma^{\alpha}_{1i}\omega^i, \\ &da = A_i\omega^i, \quad i = 1,2; \quad \alpha = 1,2,3; \quad \lambda = 2,3, \end{aligned} \qquad (1)$$

и квадратичными уравнениями, полученными при внешнем дифференцировании системы уравнений (1). Здесь формы