УДК 514.75

Ю.И. Попов

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ВВЕДЕНИЕ ПРОЕКТИВНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА S$\mathcal{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИИ

Рассмотрен специальный класс трехсоставных распределений, для которых Λ-, L-, E-подрасслоения взаимны [1]. Такие составные распределения названы S$\mathcal{H}$-распределениями. Введены проективные связности γ, η, ν, полученные путем проектирования [2], ассоциированные с Λ-, L-, E-подрасслоениями. Приведены строения тензоров кривизны-кручения связностей γ, η, ϑ.

В работе принята следующая схема индексов: $J, K, L,... = \overline{1, n}$; $p, q, s = \overline{1, r}$; $p, \overline{q}, \overline{s} = \overline{0, r}$; $i, j, k, h = \overline{r+1, m}$; $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k} = 0, \overline{r+1, m}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}$; $a, b = \overline{1, m}$; $a, \overline{b}, \overline{c} = \overline{0, m}$; $\hat{\mathrm{j}} = \overline{\mathrm{r}+1, \mathrm{m}}, \mathrm{n}$; $\hat{\beta} = \overline{\mathrm{m}+1, \mathrm{n}-1}, \mathrm{n}$; $\mathrm{u}, \mathrm{v} = \overline{\mathrm{r}+1, \mathrm{n}-1}$; $\hat{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{r}+1, \mathrm{n}-1}, \mathrm{n}$; $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma} = \{0; \alpha\}$; $A, B = \{\overline{1, r}; \overline{m+1, n-1}\} = \{i, p\}$.

1. Известно [1], что относительно репера 1-го порядка R_1 дифференциальные уравнения S$\mathcal{H}$-распределения имеют вид

$$\begin{gathered}
\omega_p^n = \Lambda_{p\hat{q}}^n \omega_0^{\hat{q}}, \quad \omega_i^n = \Lambda_{i\hat{j}}^n \omega_0^{\hat{j}}, \quad \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\hat{\beta}}^n \omega_0^{\hat{\beta}}, \\
\omega_p^\alpha = \Lambda_{pK}^\alpha \omega_0^K, \quad \omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K, \quad \omega_p^i = \Lambda_{pK}^i \omega_0^K, \\
\omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha K}^p \omega_0^K, \quad \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K, \quad \omega_i^p = \Lambda_{iK}^p \omega_0^K.
\end{gathered} \tag{1}$$

Отметим, что величины $\Lambda_{\alpha K}^p$, $\Lambda_{\alpha K}^i$, Λ_{iK}^p являются компонентами геометрического объекта 2-го порядка S$\mathcal{H}$-распределения.

Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,r}$, n-мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n , а слоями (r-мерные центропроективные пространства) — плоскости Λ_r базисного распределения $\Lambda \subset S\mathcal{H}$. Проективную связность γ пространства $P_{n,r}$ определим при помощи системы слоевых форм

$$\theta_{\bar{q}}^{\bar{p}} = \omega_{\bar{q}}^{\bar{p}} - \gamma_{\bar{q}K}^{\bar{p}} \omega_0^K , \qquad (2)$$

удовлетворяющих структурным уравнениям Картана — Лаптева [3]

$$D\theta_{\bar{q}}^{\bar{p}} = \theta_{\bar{q}}^{\bar{s}} \wedge \theta_{\bar{s}}^{\bar{q}} + R_{\bar{q}KL}^{\bar{p}} \omega_0^K \wedge \omega_0^L , \qquad (3)$$

где

$$\begin{gathered} d\gamma_{\bar{q}K}^{\bar{p}} - \gamma_{\bar{s}K}^{\bar{p}} \omega_{\bar{q}}^{\bar{s}} + \gamma_{\bar{q}K}^{\bar{s}} \omega_{\bar{s}}^{\bar{p}} - \gamma_{\bar{q}J}^{\bar{p}} \omega_K^J + \gamma_{\bar{q}K}^{\bar{p}} \omega_0^0 + \\ + \Lambda_{\bar{q}K}^{\hat{v}} \omega_{\hat{v}}^{\bar{p}} - \gamma_{\bar{s}L}^{\bar{p}} \gamma_{\bar{q}K}^{\bar{s}} \omega_0^L = \Gamma_{\bar{q}KL}^{\bar{p}} \omega_0^L ; \end{gathered} \qquad (4)$$

$$R_{\bar{q}KL}^{\bar{p}} = \gamma_{\bar{q}[KL]}^{\bar{p}} , \ \Lambda_{0K}^{\hat{v}} = \delta_K^{\hat{v}} . \qquad (5)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения (3) удовлетворяются, если охваты компонент объекта проективной связности $\gamma = \{\gamma_{\bar{q}K}^{\bar{p}}\}$ взять следующим образом:

$$\begin{gathered} \gamma_{0K}^0 = \nu_n^0 \delta_K^n + \lambda_v^0 \delta_K^v , \quad \gamma_{0K}^p = \nu_n^p \delta_K^n , \quad \gamma_{qK}^p = \Lambda_{qK}^n \nu_n^p , \\ \gamma_{qK}^0 = \nu_n^0 \Lambda_{qK}^n + \lambda_v^0 \Lambda_{qK}^v , \end{gathered} \qquad (6)$$

где $\lambda_i^0 = -\dfrac{1}{r}\Lambda_{ip}^p$, $\lambda_\alpha^0 = -\dfrac{1}{r}\Lambda_{\alpha p}^p$, $\nabla\lambda_v^0 + \omega_v^0 \equiv 0$. Можно показать, следуя работе [2], что построенная инвариантным образом проективная связность γ (6) определена путем проектирования при помощи оснащающей по Картану плоскости $K_{n-r-1}(\nu) = [K_v, K_n]$, где $K_v = A_v + \lambda_v^0 A_0$, $K_n = x_n^0 A_0 + \nu_n^p A_p + \Lambda_n^v A_v + A_n$, $x_n^0 = \nu_n^0 + \Lambda_n^v \lambda_v^0$, $\nu_n^0 = -\dfrac{1}{r}(\nu_{np}^p - \Lambda_{pq}^n \nu_n^p \nu_n^q)$, $\Lambda_n^v = \dfrac{1}{r}\Lambda_{pq}^v \Lambda_n^{qp}$.

Компоненты тензора кривизны-кручения $\{R^{\bar{p}}_{\bar{q}KL}\}$ (5) пространства $P_{n,r}$ в структурных уравнениях (3) имеют следующие строения:

$$R^{p}_{qKL} = \Lambda^{n}_{q[KL]}\nu^{p}_{n} + \Lambda^{n}_{q[K}\nu^{p}_{|n|L]} + \Lambda^{v}_{q[K}\Lambda^{p}_{|v|L]} + \nu^{0}_{n}\Lambda^{n}_{q[K}\delta^{p}_{L]} + \lambda^{0}_{v}\Lambda^{v}_{q[K}\delta^{p}_{L]} -$$
$$- \nu^{p}_{n}\lambda^{0}_{v}\Lambda^{v}_{q[K}\delta^{n}_{L]} - \nu^{p}_{n}\nu^{0}_{n}\Lambda^{n}_{q[K}\delta^{n}_{L]} - \nu^{s}_{n}\nu^{p}_{n}\Lambda^{n}_{q[K}\Lambda^{n}_{|s|L]},$$
$$R^{p}_{0KL} = \nu^{p}_{n[L}\delta^{n}_{K]} + \Lambda^{p}_{v[K}\delta^{v}_{L]} + \lambda^{0}_{v}\delta^{v}_{[K}\delta^{p}_{L]} + \nu^{0}_{n}\delta^{n}_{[K}\delta^{p}_{L]} + \nu^{p}_{n}\delta^{s}_{[K}\Lambda^{n}_{|s|L]} -$$
$$- \lambda^{0}_{v}\nu^{p}_{n}\delta^{v}_{[K}\delta^{n}_{L]} - \nu^{p}_{n}\nu^{s}_{n}\delta^{n}_{[K}\Lambda^{n}_{|s|L]},$$
$$R^{0}_{qKL} = \nu^{0}_{n}\Lambda^{n}_{q[KL]} + \nu^{0}_{n[L}\Lambda^{n}_{|q|K]} + \lambda^{0}_{v[L}\Lambda^{v}_{|q|K]} + \lambda^{0}_{v}\Lambda^{v}_{q[KL]} - (\nu^{0}_{n})^{2}\Lambda^{n}_{q[K}\delta^{n}_{L]} -$$
$$- \nu^{0}_{n}\lambda^{0}_{v}\Lambda^{n}_{q[K}\delta^{v}_{L]} - \lambda^{0}_{v}\nu^{0}_{n}\Lambda^{v}_{q[K}\delta^{n}_{L]} + \lambda^{0}_{v}\lambda^{0}_{w}\Lambda^{v}_{q[K}\delta^{w}_{L]} - \nu^{0}_{n}\nu^{s}_{n}\Lambda^{n}_{q[K}\Lambda^{n}_{|s|L]} -$$
$$- \nu^{s}_{n}\lambda^{0}_{v}\Lambda^{n}_{q[K}\Lambda^{v}_{|s|L]},$$
$$R^{0}_{0KL} = \nu^{0}_{n[L}\delta^{n}_{K]} + \lambda^{0}_{v[L}\delta^{v}_{K]} - \nu^{0}_{n}\Lambda^{n}_{s[K}\delta^{s}_{L]} - \lambda^{0}_{v}\Lambda^{v}_{s[K}\delta^{s}_{L]} - \nu^{s}_{n}\nu^{0}_{n}\delta^{n}_{[K}\Lambda^{n}_{|s|L]} -$$
$$- \lambda^{0}_{v}\nu^{s}_{n}\delta^{n}_{[K}\Lambda^{v}_{|s|L]}.$$

2. Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,s}$, n-мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n, а слоями — плоскости L_s $(s = m - r)$ L-подрасслоения данного S$\mathcal{H}$-распределения [1]. Определим проективную связность η пространства $P_{n,s}$ при помощи системы слоевых форм

$$\theta^{\bar{i}}_{\bar{j}} = \omega^{\bar{i}}_{\bar{j}} - \eta^{\bar{i}}_{\bar{j}K}\omega^{K}_{0}\,, \tag{7}$$

удовлетворяющих структурным уравнениям Картана — Лаптева [3]

$$D\theta^{\bar{i}}_{\bar{j}} = \theta^{\bar{k}}_{\bar{j}} \wedge \theta^{\bar{i}}_{\bar{k}} + r^{\bar{i}}_{\bar{j}KL}\omega^{K}_{0} \wedge \omega^{L}_{0}\,. \tag{8}$$

Предположим, что L-подрасслоение оснащено в смысле Э. Картана [4] полем плоскостей $\widetilde{K}_{n-s-1}(\nu^{i}_{n})$, причем оснащающая плоскость в каждом центре A_0 натянута на точки

$$\widetilde{K}_{\alpha} = A_{\alpha} + L^0_{\alpha} A_0, \ \widetilde{K}_p = A_p + L^0_p A_0,$$

$$\widetilde{K}_n(\nu^i_n) = (\varphi^0_n + L^{\alpha}_n L^0_{\alpha} + L^p_n L^0_p) A_0 + L^B_n A_B + \nu^i_n A_i + A_n, \tag{9}$$

где

$$L^B_n = \frac{1}{s} \Lambda^B_{ij} \Lambda^{ji}_n, \quad L^0_B = -\frac{1}{s} \Lambda^i_{Bi}, \quad \phi^0_n = -\frac{1}{s} (\nu^i_{ni} - \Lambda^n_{ki} \nu^k_n \nu^i_n). \tag{10}$$

Охват компонент объекта проективной связности $\eta = \{\eta^{\bar{i}}_{\bar{j}K}\}$ можно осуществить следующим образом:

$$\begin{gathered} \eta^i_{0K} = \nu^i_n \delta^n_K, \quad \eta^0_{0K} = \varphi^0_n \delta^n_K + L^0_B \delta^B_K, \quad \gamma^i_{jK} = \Lambda^n_{jK} \nu^i_n, \\ \gamma^0_{jK} = \varphi^0_n \Lambda^n_{jK} + L^0_B \Lambda^B_{jK}. \end{gathered} \tag{11}$$

Слоевые формы $\theta^{\bar{i}}_{\bar{j}}$ (7) при охватах (11) удовлетворяют уравнениям (8), т. е. связность η (11) инвариантным образом определена в слоях L-подрасслоения. Следуя работе [2], можно показать, что построенная связность η определена путем проектирования при помощи оснащающей по Картану плоскости $\widetilde{K}_{n-s-1}$. Компоненты тензора кривизны-кручения $r^{\bar{i}}_{\bar{j}KL}$ имеют следующие строения:

$$\begin{aligned} r^i_{jKL} &= \Lambda^n_{j[KL]} \nu^i_n + \Lambda^n_{j[K} \nu^i_{|n|L]} + \phi^0_n \Lambda^n_{j[K} \delta^i_{L]} + L^0_B \Lambda^B_{j[K} \delta^i_{L]} + \\ &\quad + \Lambda^B_{j[K} \Lambda^i_{|B|L]} - \nu^i_n \nu^h_n \Lambda^n_{j[K} \Lambda^n_{|h|L]} - \nu^i_n \ {}^0_n \Lambda^n_{j[K} \delta^n_{L]} - \nu^i_n L^0_B \Lambda^B_{j[K} \delta^n_{L]}, \\ r^i_{0KL} &= \nu^i_{n[L} \delta^n_{K]} - \Lambda^i_{B[K} \delta^B_{L]} + \phi^0_n \delta^n_{[K} \delta^i_{L]} + L^0_B \delta^B_{[K} \delta^i_{L]} - \nu^i_n \Lambda^n_{j[K} \delta^j_{L]} + \\ &\quad + \nu^i_n \nu^j_n \Lambda^n_{j[K} \delta^n_{L]} + \nu^i_n L^0_B \delta^B_{[K} \delta^n_{L]}, \\ r^0_{jKL} &= \phi^0_{n[L} \Lambda^n_{|j|K]} + \phi^0_n \Lambda^n_{j[KL]} + L^0_{B[L} \Lambda^B_{|j|K]} + L^0_B \Lambda^B_{j[KL]} - (\phi^0_n)^2 \Lambda^n_{j[K} \delta^n_{L]} - \\ &\quad - \phi^0_n L^0_B \Lambda^n_{j[K} \delta^B_{L]} - \phi^0_n L^0_B \Lambda^B_{j[K} \delta^n_{L]} + L^0_A L^0_B \Lambda^A_{j[K} \delta^B_{L]} - \phi^0_n \nu^h_n \Lambda^n_{j[K} \Lambda^n_{|h|L]} + \\ &\quad + \nu^h_n L^0_B \Lambda^n_{j[K} \Lambda^B_{|h|L]}, \\ r^0_{0KL} &= \phi^0_{n[L} \delta^n_{K]} + L^0_{B[L} \delta^B_{K]} + \phi^0_n \delta^j_{[K} \Lambda^n_{|j|L]} + L^0_B \delta^j_{[K} \Lambda^B_{|j|L]} - \nu^j_n \phi^0_n \delta^n_{[K} \Lambda^n_{|j|L]} + \\ &\quad + \nu^j_n L^0_B \delta^n_{[K} \Lambda^B_{|j|L]}. \end{aligned}$$

3. Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,n-m-1}$, n-мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n, а слоями — плоскости E_{n-m-1} оснащающего E-подрасслоения данного S$\mathcal{H}$-распределения [1]. Проективную связность ϑ в слоях E-подрасслоения определим при помощи системы слоевых форм

$$\vartheta_{\bar\beta}^{\bar\alpha} = \omega_{\bar\beta}^{\bar\alpha} - \vartheta_{\bar\beta K}^{\bar\alpha}\omega_0^K, \qquad (12)$$

удовлетворяющих структурным уравнениям Картана — Лаптева

$$D\vartheta_{\bar\beta}^{\bar\alpha} = \vartheta_{\bar\beta}^{\bar\gamma} \wedge \omega_{\bar\gamma}^{\bar\alpha} + R_{\bar\beta KL}^{\bar\alpha}\omega_0^K \wedge \omega_0^L. \qquad (13)$$

Формы $\vartheta_{\bar\beta}^{\bar\alpha}$ (12) удовлетворяют уравнениям (13), если в качестве компонент объекта проективной связности $\vartheta = \{\vartheta_{\bar\beta K}^{\bar\alpha}\}$ взять следующие функции:

$$\begin{gathered}\vartheta_{\beta K}^{\alpha} = \nu_n^\alpha \Lambda_{\beta K}^n, \quad \vartheta_{0K}^{\alpha} = \nu_n^\alpha \delta_K^n, \quad \vartheta_{\alpha K}^{0} = \Psi_n^0 \Lambda_{\alpha K}^n + M_a^0 \Lambda_{\alpha K}^a, \\ \vartheta_{0K}^{0} = \Psi_n^0 \delta_K^n + M_a^0 \delta_K^a.\end{gathered} \qquad (14)$$

Нами показано, что проективная связность ϑ (14) определяется путем проектирования при помощи оснащающей в смысле Картана плоскости $\widetilde{C}_m(A_0) = [\widetilde{C}_a, \widetilde{C}_n]$, где

$$\widetilde{C}_n = (\Psi_n^0 + M_a^0 M_n^a)A_0 + \nu_n^\alpha A_\alpha + M_n^a A_a + A_n, \; \widetilde{C}_a = A_a + M_a^0 A_0,$$

$$M_a^0 = -\frac{1}{n-m-1}\Lambda_{a\beta}^\beta, \quad M_n^a = \frac{1}{n-m-1}\Lambda_{\alpha\beta}^a \Lambda_n^{\beta\alpha},$$

$$\Psi_n^0 = -\frac{1}{n-m-1}(\nu_{n\alpha}^\alpha - \Lambda_{\alpha\beta}^n \nu_n^\alpha \nu_n^\beta).$$

Охваты компонент тензора кривизны-кручения $\{R_{\bar\beta KL}^{\bar\alpha}\}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}R_{\beta KL}^\alpha = {}& \nu_{n[L}^\alpha \Lambda_{|\beta|K]}^n + \nu_n^\alpha \Lambda_{\beta[KL]}^n - \psi_n^0 \Lambda_{\beta[K}^n \delta_{L]}^\alpha - M_a^0 \Lambda_{\beta[K}^a \delta_{L]}^\alpha + N_{\beta[K}^a \Lambda_{|a|L]}^\alpha - \\ & - \nu_n^\alpha \psi_n^0 \Lambda_{\beta[K}^n \delta_{L]}^n - \nu_n^\alpha M_a^0 \Lambda_{\beta[K}^a \delta_{L]}^n - \nu_n^\alpha \nu_n^\gamma \Lambda_{\beta[K}^n \Lambda_{|\gamma|L]}^n,\end{aligned}$$

$$R^{\alpha}_{0KL} = \nu^{\alpha}_{n[L}\delta^{n}_{K]} - \nu^{\alpha}_{n}\Lambda^{n}_{\gamma[K}\delta^{\gamma}_{L]} + \psi^{0}_{n}\delta^{n}_{[K}\delta^{\alpha}_{L]} + M^{0}_{a}\delta^{a}_{[K}\delta^{\alpha}_{L]} + \delta^{a}_{[K}\Lambda^{\alpha}_{|a|L]} -$$

$$- \gamma^{\alpha}_{n}\gamma^{\beta}_{n}\delta^{n}_{[K}\Lambda^{n}_{|\beta|L]} - \nu^{\alpha}_{n}M^{0}_{a}\delta^{a}_{[K}\delta^{n}_{L]},$$

$$R^{0}_{\beta KL} = \psi^{0}_{n[L}\Lambda^{n}_{|\beta|K]} + \psi^{0}_{n}\Lambda^{n}_{\beta[KL]} + M^{0}_{a[L}\Lambda^{a}_{|\beta|K]} + M^{0}_{a}\Lambda^{a}_{\beta[KL\}} - (\psi^{0}_{n})^{2}\Lambda^{n}_{\beta[K}\delta^{n}_{L]} -$$

$$- M^{0}_{a}\psi^{0}_{n}\Lambda^{n}_{\beta[K}\delta^{a}_{L]} - \psi^{0}_{n}M^{0}_{a}\Lambda^{a}_{\beta[K}\delta^{n}_{L]} - M^{0}_{a}M^{0}_{b}\Lambda^{a}_{\beta[K}\delta^{b}_{L]} -$$

$$- \nu^{\gamma}_{n}\psi^{0}_{n}\Lambda^{n}_{\beta[K}\Lambda^{n}_{|\gamma|L]} - \nu^{\gamma}_{n}M^{0}_{a}\Lambda^{n}_{\beta[K}\Lambda^{a}_{|\gamma|L]},$$

$$R^{0}_{0KL} = \psi^{0}_{n[L}\delta^{n}_{K]} + M^{0}_{a[L}\delta^{a}_{K]} - \psi^{0}_{n}\Lambda^{n}_{\gamma[K}\delta^{\gamma}_{L]} - M^{0}_{a}\Lambda^{a}_{\gamma[K}\delta^{\gamma}_{L]} - \psi^{0}_{n}\nu^{\gamma}_{n}\delta^{n}_{[K}\Lambda^{n}_{|\gamma|L]} -$$

$$- M^{0}_{a}\nu^{\gamma}_{n}\delta^{n}_{[K}\Lambda^{a}_{|\gamma|L]}.$$

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Сильно взаимные трехсоставные распределения проективного пространства. Калининград, 2003. Деп. в ВИНИТИ 29.09. 2003, №1743-В2003.
2. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения *m*-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Труды геом. семинара. ВИНИТИ, 1971. Т. 3. С. 49—94.
3. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Труды Моск. матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.
4. *Cartan E.* Les espaces a connexion projective // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1937. Т. 4. С. 147—159.

Yu. Popov

INTRODUCTION OF PROJECTIVE CONNECTIONS ON S$\mathcal{H}$-DISTRIBUTION

The special class of three-composite distributions is considered, for which Λ-, L-, E-subbundels are mutual [1]. Such the composite distributions are called as S$\mathcal{H}$-distributions. The projective connections γ, η, ν, obtained by projection [2], associated with Λ-, L-, E-subbundels, are introduced. The structures of curvature- torsion tensors of connections γ, η, ϑ are reduced.