ники: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1988. Т. 28. М.: ВИНИТИ АН СССР. 1988. С. 5—289.

8. *Yano K., Nagano T.* On geodesic vector fields in a compact orientable Riemannian space // Comment. Math. Helv. 1961. Vol. 35. No. 1. P. 55—64.

S. Stepanov, I. Shandra

PROPERTIES OF INFINITESIMAL HARMONIC TRANSFORMATIONS

We have defined the infinitesimal harmonic transformation in a Riemannian manifold (see [1]). In the present paper we continue studying local and global geometries of infinitesimal harmonic transformations.

УДК 514.764.22

Е. С. Степанова, И. И. Цыганок

(Финансовая академия при Правительстве РФ, г. Москва; Владимирский филиал Российского университета кооперации)

ПРИМЕР СТАТИСТИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

Введение

С. Лауритцен [1, с. 163—216], обобщая «геометростатистику» Н. Н. Ченцова (см. [2]), ввел понятие *статистического многообразия* как триплета (M^n, g, D). Здесь, по замыслу автора, гладкое n-мерное $(n \geq 2)$ многообразие M^n должно было символизировать многообразие распределений вероятностей, метрический тензор g — олицетворять фишеровский информационный тензор, а семейство линейных связностей ${}^{\gamma}\nabla = \nabla + \gamma D$, где ∇ — связность Леви-Чивита, $D \in C^{\infty} S^3 M^n$ и γ — произвольный вещественный параметр, — интерпретироваться, как однопараметрическое семейство линейных связностей Ченцова. Ключевыми моментами в его теории стали выделение сопряженных пар связностей ${}^{\gamma}\nabla$ и ${}^{-\gamma}\nabla$.

Теория абстрактных статистических многообразий нашла свое отражение в десятках статей и серии монографий (см. об этом в [3; 4]).

В настоящей статье приведен пример статистического многообразия и описаны его основные свойства.

§1. SO(3)-структура на 5-мерном многообразии

Пусть (M^5, g) — ориентированное риманово многообразие и $L(M^5)$ — расслоение линейных реперов над M^5 со структурной группой $SO(5)$. Редукция группы $SO(5)$ к ее подгруппе $SO(3)$ равносильна (см. [5]) заданию на (M^5, g) тензорного поля T типа (0, 3), удовлетворяющего условиям: $T \in C^\infty S_0^3 M^5$ и $T^2(X, X) = g(X, X)X$, которые в локальной системе координат $x^1, \dots, x^5$ принимают вид

$$T_{ijk} = T_{(ijk)};\ g^{ij}T_{ijk} = 0; \tag{1}$$

$$g^{st}\left(T_{jks}T_{lit} + T_{ljs}T_{kit} + T_{kls}T_{jit}\right) = g_{jk}g_{li} + g_{lj}g_{ki} + g_{kl}g_{ji}. \tag{2}$$

При этом тензорное поле T, подчиняющееся таким условиям (см. [5]), называется $SO(3)$-*структурой* на многообразии (M^5, g). Очевидна

Лемма. *Риманово многообразие* (M^5, g) *с* $SO(3)$-*структурой является статистическим многообразием.*

§2. Сопряженные связности на многообразии с SO(3)-структурой

Вслед за С. Лауритценом зададим на многообразии (M^5, g) с $SO(3)$-*структурой 1*-параметрическое семейство линейных связностей ${}^{\gamma}\nabla$, каждую из которых определим в локальных координатах символами Кристоффеля:

$$ {}^{\gamma}\Gamma^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right) T^{i}_{jk} \qquad (3) $$

для действительного параметра γ, символов Кристоффеля Γ^{i}_{jk} связности Леви-Чивита ∇ и $T^{i}_{jk} = g^{il}T_{ljk}$. Очевидно, что связности ${}^{\gamma}\nabla$ не имеют кручения, кроме того, $\Gamma^{i}_{jk} = {}^{1/2}\Gamma^{i}_{jk}$ и, следовательно, $\nabla = {}^{1/2}\nabla$.

Символы Кристоффеля ${}^{\gamma}\Gamma^{i}_{jk}$ и ${}^{(1-\gamma)}\Gamma^{i}_{jk}$ линейных связностей ${}^{\gamma}\nabla$ и ${}^{(1-\gamma)}\nabla$ удовлетворяют уравнениям $\partial_i g_{jk} = g_{lk}\, {}^{\gamma}\Gamma^{l}_{ij} + g_{jl}\, {}^{(1-\gamma)}\Gamma^{l}_{ki}$, которые характеризуют (см. [6, с. 173; 7, с. 53]) связности ${}^{\gamma}\nabla$ и ${}^{(1-\gamma)}\nabla$ как *сопряженную* относительно g пару $({}^{\gamma}\nabla,\, g,\, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$.

Из (3) при этом находим, что ${}^{\gamma}\nabla_i g_{jk} = (1-2\gamma)T_{ijk}$ и, следовательно, ${}^{\gamma}\nabla_i g_{jk} = {}^{\gamma}\nabla_j g_{ik}$, а потому пара связностей $({}^{\gamma}\nabla,\, g,\, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$ — *кодацциева* (см. [6, с. 182]). Поскольку $\Gamma^{i}_{jk} = 2^{-1}\left({}^{\gamma}\Gamma^{i}_{jk} + {}^{(1-\gamma)}\Gamma^{i}_{jk}\right)$, то связность Леви-Чивита $\nabla = {}^{1/2}\nabla$ является *средней связностью* (см. [6, с. 129]) сопряженной кодацциевой пары $({}^{\gamma}\nabla,\, g,\, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$.

Чебышевским вектором (см. [7, с. 62]) сопряженной пары связностей называется вектор, дуальный *1*-форме $(n+2)^{-1}\mathit{trace}\, {}^{\gamma}\Gamma$ для тензора деформации ${}^{\gamma}\Gamma = {}^{\gamma}\nabla - {}^{(1-\gamma)}\nabla$ пары сопряженных связностей $({}^{\gamma}\nabla,\, g,\, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$. В силу (1) чебышевский вектор обращается в нуль, а потому пара связностей $({}^{\gamma}\nabla,\, g,\, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$ будет *чебышевской* (см. [6, с. 181]). В этом случае (см. [8]) связности ${}^{\gamma}\nabla$ и ${}^{(1-\gamma)}\nabla$ сопряженной пары будут *эквиаффинными* с плотностями вида ${}^{\gamma}\omega_{12\ldots n} = e^{C_1}\sqrt{\det g}$ *и* ${}^{1-\gamma}\omega_{12\ldots n} = e^{C_2}\sqrt{\det g}$ для произвольных постоянных C_1 и C_2. В итоге справедлива

Теорема. *Каждая пара* $({}^{\gamma}\nabla,\ g,\ {}^{(1-\gamma)}\nabla)$ *на римановом многообразии* (M^5, g) *с* $SO(3)$*-структурой будет чебышевской и одновременно эквиаффинной с плотностями вида* ${}^{\gamma}\omega_{12\ldots n} = e^{C_1}\sqrt{\det g}$ *и* ${}^{1-\gamma}\omega_{12\ldots n} = e^{C_2}\sqrt{\det g}$.

§3. Теорема исчезновения

Пусть M^n — компактное многообразие; рассмотрим для него ориентированное двулистное накрытие и воспользуемся интегральной формулой (см. [10])

$$\int_{M^n}\left\{B_p(\varphi,\ \varphi) + \frac{1}{p(p+1)}\left\|\delta^*\varphi\right\|^2 - \frac{1}{p}\left\|\nabla\varphi\right\|^2 - \left\|\delta\varphi\right\|^2\right\}dv = 0\,, \quad (4)$$

где $\varphi \in C^\infty S^p M^n$, $B_p(\varphi,\varphi)$ — квадратичная форма, чьи коэффициенты являются компонентами тензора кривизны R и Риччи Ric многообразия (M^n, g). В [10] доказано, что знак квадратичной формы $B_p(\varphi,\ \varphi)$ противоположен знаку симметрического оператора кривизны второго рода $\overset{o}{R} : C^\infty S^2 M^n \to C^\infty S^2 M^n$ (см. [11, с. 278]).

$SO(3)$-структура на многообразии (M^5, g) называется *приближенно интегрируемой* (см. [5; 9]), если $\delta^* T = 0$, или в локальных координатах $\nabla_{(l}T_{ijk)} = 0$. Поскольку $T \in C^\infty S_0^3 M^5$, то в качестве следствия имеем $\delta T = 0$. В этом случае уравнение (4) принимает вид:

$$\int_{M^n} \left\{ B_4(T,T) - \|\nabla T\|^2 \right\} dv = 0 .$$

Справедлива следующая теорема исчезновения.

Теорема. *На компактном ориентированном римановом многообразии* (M^5, g) *с положительно определенным оператором кривизны второго рода нельзя задать приближенно интегрируемую* $SO(3)$*-структуру.*

Список литературы

1. *Amari, S.-I.; Barndorff-Nielsen, O. E.; Kass, R. E.; Lauritzen, S. L.; Rao, C.* Differential geometry in statistical inference. Institute of Mathematical Statistics: Hayward, 1987.

2. *Ченцов Н. Н.* Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М.: Наука, 1972.

3. *Chaki M. C.* On statistical manifolds // Tensor, N.S. 1999. Vol. 61. P. 14—17.

4. *Deszcz R., Sawicz K.* Differential geometry in statistics and econometrics // Electronic Modeling. 2005. Vol. 27. No. 2. P. 139—143.

5. *Robenski M., Nurowski P.* Irreducible SO(3) geometry in dimension five // J. Reine und Angew. Math. 2007. No. 605. P. 51—93.

6. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. — 2-е изд., испр. М.: Наука, 1976.

7. *Simon U., Schwenk-Schellshmidt A., Viesel H.* Introduction to the affine differential geometry of hypersurfaces. Tokyo: Science Univ. Tokyo Press, 1991.

8. *Степанов С. Е., Степанова Е. С., Шандра И. Г.* Сопряженные связности на статистических многообразиях // Известия вузов. Математика. 2007. № 11. С. 90—98.

9. *Chiossi S., Fino A.* Nearly integrable SO(3) structures on 5-dimensional Lie groups // J. of Lie theory. 2007. Vol. 17. P. 539—562.

10. *Степанов С. Е.* Поля симметрических тензоров на компактном римановом многообразии // Математические заметки. 1992. Т. 52. Вып. 4. С. 85—88.

11. *Четырехмерная* риманова геометрия. Семинар Артура Бессе 1978/79. М.: Мир, 1985.

E. Stepanova, I. Tsyganok

AN EXAMPLE OF A STATISTIC MANIFOLD

In the present paper we consider a 5-dimensional oriented Riemannian manifold with an SO(3) structure (see [5]) as an example of a statistical manifold (see [1]).

In particular we proof that there is no a nearly integrable SO(3) structure on 5-dimensional compact oriented Riemannian manifold with positive definite second-type curvature operator.

УДК 514.764.3

А. В. Христофорова

(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)

ДВОЙСТВЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ СЕТЕЙ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Работа посвящена изучению геометрии сетей на гиперповерхности в пространстве аффинной связности.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I, J, L, K, T, S = \overline{1, n};\ \bar{I}, \bar{J}, \bar{L}, \bar{K}, \bar{T}, \bar{S} = \overline{0, n};\ i, j, l, k, t, s = \overline{1, n-1}.$$

Рассмотрим пространство аффинной связности $A_{n,n}$, заданное системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^I, \theta^I_K\}$, подчиненных структурным уравнениям [4]:

$$D\theta^I = \theta^K \wedge \theta^I_K + \frac{1}{2} r^I_{ST} \theta^S \wedge \theta^T, D\theta^I_J = \theta^K_J \wedge \theta^I_K + \frac{1}{2} r^I_{JST} \theta^S \wedge \theta^T,$$

$$r^I_{(ST)} = 0,\ \ r^I_{L(ST)} = 0,\ \ \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^n \neq 0;$$

r^I_{PQ} и r^I_{KPQ} — соответственно тензоры кручения и кривизны пространства $A_{n,n}$.